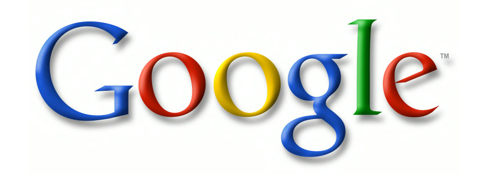
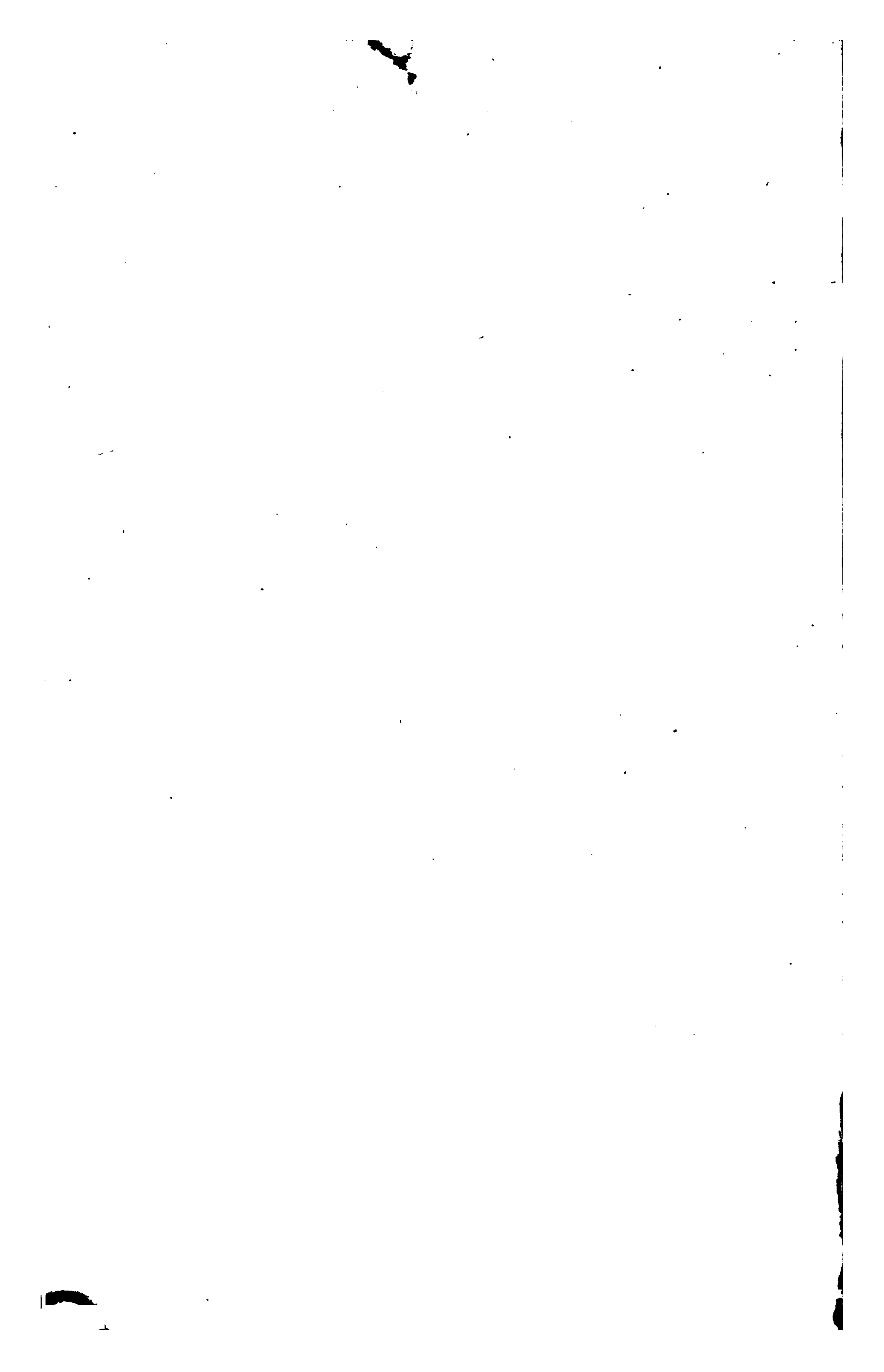




KINEMATIK

von

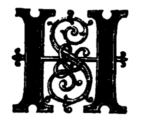
Dr. **Julius Petersen,**
Docent an der polytechnischen Schule in Kopenhagen,
Mitglied der königlich dänischen Akademie der Wissenschaften.

Deutsche Ausgabe,

unter Mitwirkung des Verfassers besorgt

von

Dr. **R. von Fischer-Benzon,**
Oberlehrer am Gymnasium in Kiel.



Kopenhagen.

Verlag von Andr. Fred. Höst & Sohn,
Buchhändler d. kgl. dän. Akademie der Wissenschaften.

1884

Kopenhagen. — Bianco Lunos Königl. Hof-Buchdruckerei.

EINLEITUNG.

1. Die Kinematik*) stellt sich die Aufgabe, die Bewegung der Körper auf die einfachste Weise zu beschreiben. Als Wissenschaft bildet dieselbe ein Mittelglied zwischen der reinen Geometrie und der Dynamik, indem sie Rücksicht nimmt auf die Zeit, in der die Bewegungen vor sich gehen, aber nicht auf die Kräfte, durch welche sie hervorgerufen werden. Die Zeit, welche mit t bezeichnet werden mag, wird nach Sekunden gemessen und von einem willkürlich gewählten Augenblick an gerechnet.

2. Die Kurve, welche ein beweglicher Punkt beschreibt (die Bahn, Trajektorie), wird in der Geometrie durch zwei Gleichungen zwischen den Koordinaten des Punktes bestimmt; in der Kinematik sind drei Gleichungen zwischen den Koordinaten und der Zeit erforderlich; diese kann man sich auf die Form

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t) \qquad (1)$$

gebracht denken, und dieselben bestimmen dann explicit die Stelle des Punktes im Raum für jeden gegebenen

*) Ampère: Essai sur la classification des sciences.

Zeitpunkt. Wird t zweimal zwischen den drei Gleichungen eliminirt, so erhält man die Gleichungen der Bahn.

3. Geschwindigkeit. Die von einem beweglichen Punkte durchlaufene Bogenlänge, von einem willkürlich gewählten Punkte der Bahn an gerechnet und für das Meter als Einheit, soll mit s bezeichnet werden. Zu den Zeiten t und t_1 möge der Punkt sich in den Punkten s und s_1 befinden; der Quotient

$$\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$$

giebt dann das Verhältnis zwischen der zurückgelegten Weglänge und der angewandten Zeit an. Ist dieses Verhältnis konstant, so nennt man es die Geschwindigkeit des Punktes. Ist es nicht konstant, so läfst man s_1 sich s nähern und nennt das Grenzverhältnis

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{2}$$

die Geschwindigkeit im Punkte s. Da man sich die Zeit immer wachsend denkt, dt also positiv ist, so wird die Geschwindigkeit positiv, wenn s zunimmt, negativ, wenn s abnimmt.

Während (2) die Geschwindigkeit der Gröfse nach bestimmt, definiert man die Richtung derselben als die Richtung der Tangente in dem Punkte der Bahn, in welchem der bewegliche Punkt sich befindet. Die Geschwindigkeit in jedem Punkte läfst sich deshalb durch eine Strecke darstellen, welche auf der Tangente abgetragen ist, sobald man eine beliebige Strecke als Einheit der Geschwindigkeit gewählt hat, unter Einheit der Geschwindigkeit diejenige Geschwindigkeit verstanden,

welche ein Punkt besitzt, der ein Meter in einer Sekunde durchläuft.

Die Bewegung heifst gleichförmig, wenn die Bahn eine gerade Linie darstellt und die Geschwindigkeit konstant ist; dieselbe ist bestimmt durch eine Gleichung von der Form

$$x = a + bt,$$

worin b die Geschwindigkeit bedeutet.

4. **Beschleunigung.** Ein Punkt möge sich auf einer geraden Linie, z. B. auf der x-Axe, bewegen und zu den Zeiten t und t_1 die Geschwindigkeiten v und v_1 haben. Der Quotient

$$\frac{v_1 - v}{t_1 - t}$$

bestimmt dann das Verhältnis zwischen dem Zuwachs an Geschwindigkeit und der angewandten Zeit. Ist dieses Verhältnis konstant, so nennt man es Beschleunigung; ist es nicht konstant, so läfst man t_1 sich t nähern, wodurch v_1 sich v nähert, und nennt das Grenzverhältnis

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{3}$$

die Beschleunigung der Bewegung für die Zeit t.

Nun sei die Bahn beliebig und die Geschwindigkeiten für t und $t + dt$ mögen durch die Strecken AB und AC dargestellt werden, welche einen Winkel einschliefsen, der im allgemeinen unendlich klein von erster Ordnung ist (t als unabhängig veränderlich genommen). Unter Beschleunigung nach Gröfse und Richtung versteht man dann das Grenzverhältnis

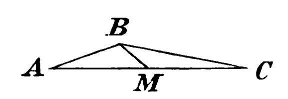
$$\frac{BC}{dt},$$

welches durch $$a = \left[\frac{dv}{dt}\right], \tag{4}$$

worin dv die geometrische Differenz zwischen den Geschwindigkeiten in zwei konsekutiven Zeitpunkten bedeutet, bezeichnet werden soll. Die Beschleunigung liegt in der oskulierenden Ebene, da dieselbe durch zwei konsekutive Tangenten bestimmt wird, und sie ist gegen die konkave Seite der Bahn gerichtet.

Den Ausdruck für die Beschleunigung benutzt man auch, wenn Mifsverständnisse ausgeschlossen sind, für die absolute Gröfse derselben.

Die Beschleunigung läfst sich auch auf eine andere Weise bestimmen. Es seien AB und BC zwei Bogenelemente, welche in zwei konsekutiven gleich grofsen Zeitelementen dt durchlaufen wurden und deshalb den Geschwindigkeiten in zwei konsekutiven Punkten proportional sind. Die geometrische Differenz zwischen



BC und AB ist $2BM$, wenn M die Mitte von AC ist; man hat also

$$a = \frac{2BM}{dt^2}. \tag{5}$$

Die Bahn zei z. B. ein Kreis mit dem Radius r und werde mit der konstanten Geschwindigkeit v durchlaufen. Dann hat man $2r.BM = BC^2$ und $BC = vdt$, mithin

$$a = \frac{v^2}{r},$$

so dafs die Beschleunigung konstant und gegen den Kreismittelpunkt gerichtet ist.

Ist die Bahn eine gerade Linie und die Beschleunigung konstant, so heifst die Geschwindigkeit gleichmäfsig wachsend oder abnehmend. Eine solche Bewegung wird bestimmt durch die Gleichung

$$x = c + bt + \frac{1}{2}at^2,$$

worin a die Beschleunigung ist, während $b + at$ die Geschwindigkeit bedeutet.

ERSTER ABSCHNITT.

Über unendlich kleine Bewegungen.

ERSTES KAPITEL.

Über die Geschwindigkeit bei Bewegung eines Punktes.

5. Zerlegung und Zusammensetzung von Geschwindigkeiten. Da die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ auf der Tangente der Bahn liegt, so werden die Projektionen derselben auf die Axen beziehungsweise

$$v_x = \frac{dx}{dt}; \quad v_y = \frac{dy}{dt}; \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{6}$$

Diese heifsen die Komponenten der Geschwindigkeit nach den Axen; es sind die Geschwindigkeiten, mit welchen die Axen von den Projektionen des beweglichen Punktes durchlaufen werden.

Im allgemeinen werden Geschwindigkeiten nach denselben Regeln zerlegt und zusammengesetzt wie Kräfte, aber diese Zerlegung und Zusammensetzung hat nur eine formale Bedeutung; dafs eine Geschwindigkeit die Resultante von zwei anderen ist, heifst nur, dafs sie Diagonale in dem durch die beiden anderen bestimmten Parallelogramm ist.

Ist die Bahn eben und benutzt man Polarkoordinaten, so ist wie bekannt

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2};$$

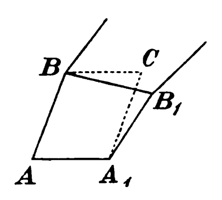
die Komponenten der Geschwindigkeit nach dem Radius vektor und senkrecht zu diesem sind deshalb beziehungsweise

$$\frac{dr}{dt} \quad \text{und} \quad r\frac{d\theta}{dt}. \tag{7}$$

6. Zusammengesetzte und relative Bewegung. Angenommen, es solle die Bewegung eines Punktes mit Beziehung auf ein Punktsystem bestimmt werden, z. B. mit Beziehung auf ein Koordinatensystem, welches als fest betrachtet wird, sich in Wirklichkeit aber selbst bewegt. Man sagt dann, daſs die Bewegung (die absolute Bewegung) zusammengesetzt sei aus der relativen Bewegung, nämlich der Bewegung mit Beziehung auf das als fest betrachtete System, und der Bewegung dieses Systems selbst, der mitführenden Bewegung (mouvement d'entraînement). Diese beiden Bewegungen heiſsen die zusammensetzenden, während die absolute Bewegung die resultierende heiſst. In ähnlicher Weise kann eine Bewegung aus mehreren zusammengesetzt sein.

Hierdurch erhält nun die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten eine reelle Bedeutung, da sich beweisen läſt, daſs die Geschwindigkeit der absoluten Bewegung die Resultante der Geschwindigkeiten der zusammensetzenden Bewegungen ist.

Der Punkt möge sich nämlich auf einer Kurve AB bewegen, welche sich selbst bewegt, so daſs sie in einem Zeitelement in die Lage $A_1 B_1$ gelangt. AB sei das in der relativen Bewegung im Zeitelement beschriebene Bogenelement. Das in derselben Zeit in der absoluten



Bewegung durchlaufene Bogenelement ist dann AB_1, und der aufgestellte Satz ist bewiesen, sobald AB_1 die Resultante von AA_1 und AB ist. Ist AC ein Parallelogramm, so wird indessen $B_1 C$ unendlich klein von zweiter Ordnung, so dafs AC und AB_1, sowohl was Gröfse und Richtung betrifft, bei der Bestimmung der Geschwindigkeit mit einander vertauscht werden können. Indessen hat man zu beachten, dafs dies nicht mehr zulässig ist, wenn man Gröfsen zu bestimmen hat, welche von unendlich kleinen Gröfsen zweiter Ordnung abhängig sind.

Aus dem bewiesenen Satze folgt nun, dafs die Geschwindigkeit der relativen Bewegung zusammengesetzt ist aus der absoluten Geschwindigkeit des Punktes und einer Geschwindigkeit, welche gleich und entgegengesetzt derjenigen ist, die der Punkt haben würde, wenn er mit dem beweglichen System fest verbunden wäre.

Wenn im Folgenden davon gesprochen wird, dafs ein Punkt gleichzeitig mehrere Geschwindigkeiten hat, so ist das in der angegebenen Weise aufzufassen; die wirkliche Geschwindigkeit des Punktes ist dann die Resultante der gleichzeitigen Geschwindigkeiten.

7. Analytisch läfst sich die zusammengesetzte Bewegung durch Gleichungen darstellen von der Form:

$$x = f_1(t_1, t_2); \quad y = f_2(t_1, t_2); \quad z = f_3(t_1, t_2). \qquad (8)$$

Betrachtet man nämlich t_2 als Konstante, während t_1 die Zeit bezeichnet, so bestimmen die Gleichungen die Bewegung des Punktes auf einer Kurve, deren Glei-

chungen durch Elimination von t_1 gefunden werden. Die Komponenten der Geschwindigkeit sind dann

$$\frac{dx}{dt_1}, \quad \frac{dy}{dt_1}, \quad \frac{dz}{dt_1}.$$

Läſst man zugleich t_2 variieren und die Zeit bezeichnen, so bewegt die Kurve sich, wobei sie freilich im allgemeinen zugleich die Form verändert (doch so, daſs die Punkte wie bei kongruenten Kurven einander eindeutig entsprechen). Betrachtet man nun t_1 als konstant, so wird der Punkt von der Kurve mitgeführt ohne sich auf dieser zu bewegen, und man erhält eine Geschwindigkeit mit den Komponenten

$$\frac{dx}{dt_2}, \quad \frac{dy}{dt_2}, \quad \frac{dz}{dt_2}.$$

Bezeichnen sowohl t_1 wie t_2 die Zeit, so erhält man gleichzeitig beide Bewegungen, und die Geschwindigkeit der resultierenden absoluten Bewegung hat die Komponenten

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

wo dx, dy und dz die totalen Differentiale bedeuten, so daſs man die Gleichung

$$dx = \frac{dx}{dt_1} dt_1 + \frac{dx}{dt_2} dt_2 \tag{9}$$

und die analogen erhält; man sieht hieraus, daſs die Projektion der absoluten Geschwindigkeit auf jede der Axen gleich der Summe der Projektionen der zusammensetzenden Geschwindigkeiten ist, und daraus folgt leicht der oben bewiesene Satz. Zugleich sieht man hieraus, daſs die bewegliche Kurve während der Bewegung sich nicht selbst kongruent zu bleiben braucht, was sich übrigens auch aus dem geometrischen Beweise ergiebt.

8. Robervals Methode der Tangenten. Roberval hat die Tangenten mehrerer Kurven dadurch bestimmt, dafs er die Geschwindigkeit eines Punktes, der die Kurve durchläuft, als die Resultante anderer Geschwindigkeiten betrachtete. Es sei beispielsweise M ein Punkt einer Ellipse mit den Brennpunkten F und F_1; die Projektionen der Geschwindigkeit von M auf die Brennstrahlen r und r_1 sind beziehungsweise

$$\frac{dr}{dt} \text{ und } \frac{dr_1}{dt};$$

aus $r + r_1 = 2a$ folgt aber $dr + dr_1 = 0$, so dafs die beiden Projektionen gleich grofs sind, die eine aber auf den Brennpunkt zu, die andere vom Brennpunkt weg gerichtet ist. Hieraus folgt dann der bekannte Satz, dafs die Tangente den Winkel zwischen den Brennstrahlen halbiert.

Als ein zweites Beispiel möge die Konchoide erwähnt werden. Um O dreht sich eine gerade Linie, welche eine gegebene Gerade L in A schneidet, während die Konchoide von einem Punkte M der Linie beschrieben wird, dessen Entfernung AM von A konstant ist. Sowohl für A wie für M wird die Geschwindigkeit in zwei andere zerlegt, von denen die eine auf die OA fällt, die andere senkrecht darauf gerichtet ist. Da AM konstant ist, so mufs die erste Komponente für beide Punkte gleich werden, während die Komponenten senkrecht auf OA sich wie ihre Abstände von O verhalten müssen. Da nun die absolute Geschwindigkeit von A auf L liegt, während ihre Gröfse beliebig angenommen werden kann, so kennt man die Komponenten dieser Geschwindigkeit und damit zugleich die Komponenten der Geschwindigkeit von M, welche sich hieraus konstruiren lassen.

Anwendungen.

1. Bestimme die Gleichungen für die Bewegung eines Punktes, welcher mit der konstanten Geschwindigkeit v den Kreis $x^2+y^2=r^2$ durchläuft.

2. Bestimme die Tangente an einen Punkt der Archimedischen Spirale.

3. Ein Punkt bewegt sich so, dafs die Komponenten der Geschwindigkeit nach dem Radius vektor und senkrecht darauf in einem konstanten Verhältnis stehen; man soll die Gleichungen für die Bewegung und die Bahn, sowie die Tangente der letzteren bestimmen.

4. Ein Punkt bewegt sich im Raum und wird durch die Polarkoordinaten r, θ und ψ bestimmt; es soll bewiesen werden, dafs die Geschwindigkeit drei auf einander senkrechte Komponenten

$$\frac{dr}{dt}, \quad r\frac{d\theta}{dt}, \quad r\sin\theta\frac{d\psi}{dt}$$

hat.

5. Bestimme die geradlinige Bewegung eines Punktes, wenn die Beschleunigung dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist und man die Lage und Geschwindigkeit des Punktes für $t=0$ kennt.

ZWEITES KAPITEL.

Über die Geschwindigkeit bei der Bewegung eines unveränderlichen Punktsystems.

---

9. Translation. Unter Körper soll ein System von fest verbundenen Punkten verstanden werden, zu dem jeder Punkt des Raumes als zugehörig betrachtet werden kann. Eine Translation ist eine solche Bewegung,

durch welche alle Punkte in jedem Augenblick gleich große und parallele Geschwindigkeiten erhalten, so daß alle Ebenen und Geraden während der Bewegung ihren ursprünglichen Lagen parallel bleiben. Die Translation ist bestimmt, sobald man die Bewegung eines Systempunktes kennt. Die Geschwindigkeit desselben in jedem Augenblick heißt die Geschwindigkeit der Translation in diesem Augenblick.

10. Rotation, Winkelgeschwindigkeit. Dreht sich ein Körper um eine feste Axe, so heißt die Bewegung eine Rotation. Die Geschwindigkeit jedes Punktes ist senkrecht auf einer durch die Axe und den Punkt gelegten Ebene und dem Abstande von der Axe proportional. Unter Winkelgeschwindigkeit versteht man die Geschwindigkeit eines Punktes, dessen Entfernung von der Axe gleich der Einheit ist; ist die Winkelgeschwindigkeit ω, so wird die Geschwindigkeit eines Punktes, dessen Entfernung von der Axe r ist,

$$v = r\omega. \tag{10}$$

Wenn eine durch die Axe gelegte Ebene in der Zeit dt einen Winkel $d\theta$ beschreibt, so ist $d\theta$ der von einem Punkte in der Entfernung der Einheit von der Axe in der Zeit dt durchlaufene Weg und folglich

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \tag{11}$$

Die Rotation ist bestimmt, wenn man die Axe kennt und zugleich die Winkelgeschwindigkeit als Funktion der Zeit.

Wenn sich die Rotationsaxe bis ins Unendliche entfernt, so geht die Rotation in eine Translation über.

11. Elementarbewegung. Die unendlich kleine Bewegung, welche ein Körper, der sich auf beliebige Weise

bewegt, in einem Zeitelement dt ausführt, soll eine Elementarbewegung heifsen. Mit dieser durchläuft jeder Punkt ein Element seiner Bahn; der Weg in der Zeit dt kann deshalb als geradlinig und als mit der Tangente der Bahn zusammenfallend betrachtet werden.

Zwischen zwei Bewegungen findet in einem gegebenen Augenblick einfache Berührung statt, wenn die Elementarbewegungen in diesem Augenblick dieselben sind, so dafs jeder Punkt in diesem Augenblick durch die beiden Bewegungen dieselbe Geschwindigkeit nach Gröfse und Richtung erfährt. Die Bewegungen haben Berührung von zweiter Ordnung, sobald bei denselben zwei konsekutive Elementarbewegungen zusammenfallen, und so fort. Ist Berührung von zweiter Ordnung vorhanden, so erhält jeder Punkt in dem gegebenen Augenblick dieselbe Beschleunigung durch beide Bewegungen. Man kann sich vorstellen, dafs ein Körper gleichzeitig mehrere Elementarbewegungen habe; die wirkliche Bewegung ist dann für jeden Punkt die Resultante aus den gleichzeitigen Bewegungen.

12. Eine Bewegung um einen festen Punkt hat in jedem Augenblick eine tangierende Rotation.

O sei der feste Punkt, und die Bewegung möge in der Zeit dt einen Punkt A nach B führen, während dieselbe gleichzeitig B nach C führt. Eine Ebene, senkrecht auf der Mitte von AB, und eine Ebene, senkrecht auf der Mitte von BC, schneiden sich in einer Geraden L, welche durch O geht. Eine elementare Rotation um diese Gerade, durch welche A nach B geführt wird, führt auch B nach C, und da die ganze Elementarbewegung durch die Bewegung dieser beiden Punkte bestimmt ist, so

mufs die Rotation mit der gegebenen Elementarbewegung zusammenfallen.

L heifst die augenblickliche Drehaxe oder Momentanaxe; die Winkelgeschwindigkeit ist $AB:kdt$, worin k den Abstand des Punktes A von L bedeutet. Die Berührung ist im allgemeinen einfache Berührung, so dafs die Rotation die Beschleunigungen nicht bestimmt.

Die elementare Rotation wird dargestellt, indem man auf der Axe eine Strecke abträgt, welche durch ihre Länge die Gröfse der Winkelgeschwindigkeit angiebt; die Strecke wird zugleich mit einem Anfangspunkt und einem Endpunkt so abgetragen, dafs man, indem man von dem letzteren nach dem ersteren blickt, die Rotation in der Umlaufsrichtung vor sich gehen sieht, in der sich die Uhrzeiger drehen. Dadurch wird dieselbe als positiv oder negativ gemessen, indem man auf L eine positive Richtung wählt. Man sieht also, dafs eine Rotation sich ganz ebenso darstellen läfst wie eine Kraft in der Statik.

Bewegt sich eine ebene Figur beliebig in ihrer Ebene, so sieht man auf ähnliche Weise, dafs die Elementarbewegung eine Rotation um einen Punkt der Ebene ist (eigentlich um eine in diesem Punkte auf der Ebene errichtete Senkrechte), welcher der augenblickliche Drehpunkt heifst; kennt man die Richtungen der Geschwindigkeiten von zwei Punkten, so ist der Drehpunkt bestimmt und damit die Richtung der Geschwindigkeit jedes anderen Punktes; kennt man zugleich die Gröfse der Geschwindigkeit eines Punktes, so sind die Geschwindigkeiten aller Punkte vollkommen bestimmt.

Da zwischen der Rotation und der wirklichen Bewegung nur Berührung von erster Ordnung statt findet, so wird der Drehpunkt bei der wirklichen Bewegung im allgemeinen

eine unendlich kleine Geschwindigkeit haben; umgekehrt sieht man leicht, dafs ein Punkt, dessen Geschwindigkeit unendlich klein ist, der augenblickliche Drehpunkt ist.

So wird z. B. für eine Kurve, welche auf einer anderen Kurve rollt, der Berührungspunkt der augenblickliche Drehpunkt sein.

13. Zusammensetzung elementarer Rotationen. Da die Geschwindigkeiten, welche mehrere Rotationen mit derselben Axe einem Punkt mitteilen, dieselbe oder entgegengesetzte Richtung haben, so wird die absolute Geschwindigkeit des Punktes gleich der algebraischen Summe der von den einzelnen Rotationen herrührenden Geschwindigkeiten. Denkt man sich den Punkt in der Entfernung der Einheit von der Axe, so sieht man, dafs dasselbe für die Winkelgeschwindigkeiten gilt, so dafs Rotationen, welche auf dieselbe Gerade fallen, ebenso wie Kräfte zusammengesetzt (und zerlegt) werden.

Beachtet man nun aufserdem, dafs eine Rotation der Definition zufolge längs sich selbst verschoben werden kann, dafs sich zu einer Elementarbewegung eine beliebige Zahl von Rotationen hinzufügen läfst, sobald diese sich gegenseitig aufheben, und dafs mehrere Rotationen durch denselben Punkt eine und nur eine resultierende Rotation durch denselben Punkt haben müssen, so hat man für Rotationen genau dieselben Sätze, welche in der Statik die Grundlage für die ganze Untersuchung über Verlegung und Umformung der Kräfte bildeten, eine Untersuchung, welche auf dieser Grundlage auf rein logischem Wege durchgeführt wurde, und welche deshalb ebensowohl für Rotationen wie für Kräfte gilt; also:

Die Sätze der Statik über Verlegung und Umformung der Kräfte lassen sich auf die Kine-

matik übertragen, wenn man nur «Rotationen» an Stelle von «Kräfte» setzt. Man mufs sich natürlich bewufst bleiben, dafs hier die Rede von elementaren und nicht von endlichen Bewegungen ist.

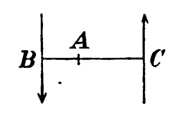
Man sieht also, dafs Rotationen durch denselben Punkt durch geometrische Addition zusammengesetzt werden und dafs parallele Rotationen wie parallele Kräfte zusammengesetzt werden.

Die Richtigkeit der Zusammensetzung läfst sich auch leicht direkt nachweisen. Sind AB und AC zwei Rotationen und AD ihre Resultante, so erhält ein beliebiger Punkt E der Ebene durch die drei Rotationen Geschwindigkeiten, welche den Flächenstücken ABE, ACE und ADE proportional sind; das letzte von diesen ist aber gleich der Summe der beiden ersten.*)

Im Folgenden werden die Bezeichnungen Kräfte und Rotationen ohne Unterschied gebraucht, je nachdem es bequemer erscheint die Frage statisch oder kinematisch aufzufassen.

14. Einem Kräftepaar in der Statik entspricht in der Kinematik eine elementare Translation, deren Geschwindigkeit wie das Moment des Kräftepaares gemessen wird.

BC sei der Abstand zwischen den beiden elementaren Rotationen, welche gleich grofs und entgegengesetzt sind, während A ein beliebiger Punkt in der Ebene der Rotationen ist. Da dieser Punkt durch beide Rotationen Geschwindigkeiten erhält, welche senk-



*) Julius Petersen: Lehrbuch der Statik fester Körper, Kopenhagen 1882, § 59.

recht zur Ebene gerichtet sind, so wird seine absolute Geschwindigkeit, wenn die Winkelgeschwindigkeit der Rotationen ω ist,

$$BA.\omega + AC.\omega = BC.\omega;$$

dieselbe ist konstant und sowohl der Gröfse wie der Richtung nach gleich dem Momente des entsprechenden Kräftepaares. Man sieht hieraus auch, wie oben (10) bemerkt wurde, dafs eine elementare Translation als eine unendlich kleine, unendlich ferne Rotation aufgefafst werden kann.

15. Jede elementare Bewegung ist aus einer Translation und einer Rotation zusammengesetzt.

Die Bewegung ist bestimmt durch die Bogenelemente AA_1, BB_1, CC_1, welche in der Zeit dt von drei Punkten A, B und C, die nicht auf derselben Geraden liegen, beschrieben werden.

Fügt man zu der elementaren Bewegung eine Translation, gleich und entgegengesetzt derjenigen, welche A nach A_1 führt, so wird der Punkt A fest, und die elementare Bewegung ist dann eine Rotation; die gegebene elementare Bewegung ist deshalb aus dieser Rotation und der Translation AA_1 zusammengesetzt.

Da der Punkt A willkürlich gewählt ist, so läfst sich die elementare Bewegung auf unendlich viele Arten in eine Translation und eine Rotation zerlegen, entsprechend den unendlich vielen Arten, auf welche man in der Statik ein System von Kräften durch ein Kräftepaar und eine Einzelkraft ersetzen kann. Benutzt man die Umformung, durch welche in der Statik die Centralaxe bestimmt wurde, so setzt sich die beliebige elementare Bewegung zusammen aus einer Rotation und einer

Translation, deren Richtung mit der Drehaxe zusammenfällt. Wenn diese Bewegung auf dieselbe Weise fortgesetzt wird, so erhält man dieselbe Bewegung, die eine Schraube in ihrer Mutter macht, und welche deshalb Schraubenbewegung genannt wird. Es ist also bewiesen, dafs jede Bewegung in jedem Augenblick eine tangierende Schraubewegung hat. Die Axe heifst die augenblickliche Dreh- und Gleitaxe.

16. Jede elementare Bewegung läfst sich aus zwei Rotationen zusammensetzen, von denen die eine auf eine beliebig gegebene Gerade L fällt. Das Tetraeder, in dem die beiden Rotationen gegenüberstehende Kanten sind, hat konstantes Volumen.

Der letzte Teil des Satzes ist aus der Statik bekannt (Satz von Chasles). Um den ersten Teil zu beweisen, denke man sich die elementare Bewegung zerlegt in eine Rotation R, welche L in einem Punkte F schneidet, und in eine Translation T. Diese läfst sich durch zwei parallele und entgegengesetzte Rotationen ersetzen, von denen die eine in der Ebene LR liegt und eine solche Gröfse hat, dafs sie durch Zusammensetzung mit R eine Resultante giebt, welche auf L fällt. Nun hat man, wie der Satz angiebt, eine Rotation, welche auf L liegt, und eine zweite Rotation, welche auf einer Geraden L_1 liegt; diese ist der Ebene RL parallel, so dafs R senkrecht auf dem kürzesten Abstand der beiden Rotationen steht. Die Geraden L und L_1 heifsen konjugiert. Die Geraden im Raume werden also bei jeder elementaren Bewegung eines Körpers als paarweise konjugiert bestimmt.

Ist L der augenblicklichen Drehaxe parallel, so rückt L_1 in unendliche Ferne, und die darauf fallende Rotation wird unendlich klein, so dafs sie in eine Translation übergeht. Wenn L senkrecht auf T steht, so fällt L_1 mit L zusammen, während die Rotationen unendlich grofs werden. Diese Doppelgeraden nehmen ein besonderes Interesse in Anspruch und werden deshalb im folgenden Kapitel genauer untersucht werden.

17. Bestimmung der augenblicklichen Drehaxe, wenn die Geschwindigkeiten dreier Punkte gegeben sind. Hat das System einen festen Punkt, so sind alle Geschwindigkeiten senkrecht auf der Drehaxe; trägt man deshalb von einem beliebigen Punkte O aus die drei Geschwindigkeiten OA, OB und OC ab, so müssen diese also in dieselbe, auf der Axe senkrechte Ebene fallen. Hat das System keinen festen Punkt, so kann man einen solchen herstellen, indem man eine Translation hinzufügt, deren Geschwindigkeit der eines beliebigen Punktes gleich und entgegengesetzt ist. Dadurch wird das Dreieck ABC nicht verändert, denn es wird nur parallel mit sich verschoben. Wenn die hinzugefügte Translation die Gleitung längs der augenblicklichen Drehaxe gerade aufhebt, so mufs sie dieser parallel sein. Das Resultat ist also folgendes: Man konstruiere ein Tetraeder $OABC$, dessen in O zusammenstofsende Kanten den gegebenen Geschwindigkeiten gleich und parallel sind; die augenblickliche Drehaxe steht dann senkrecht auf der Ebene ABC, und die Gleitung wird durch die Höhe OM des Tetraeders dargestellt.

Um die Lage der Axe zu bestimmen, projiciert man die gegebenen Punkte mit ihren Geschwindigkeiten auf

die Ebene ABC. Die Projektionen seien aa_1, bb_1, cc_1, und die Axe schneide die Ebene in o. Soll die Lösung möglich sein, so müssen die drei Strecken ihren Abständen von o proportional sein und senkrecht beziehungsweise auf oa, ob und oc stehen, so dafs sich o leicht bestimmen läfst.

18. Mit Hülfe der im vorigen Paragraphen gelösten Aufgabe läfst sich, wenn man die Geschwindigkeiten von drei Punkten kennt, die Geschwindigkeit jedes anderen Punktes bestimmen, indem man zuerst die Axe und die Gleitung bestimmt. Indessen soll nun eine mehr direkte Lösung derselben Aufgabe gegeben werden.

Eine Gerade AB möge durch eine beliebige Bewegung in die konsekutive Lage A_1B_1 übergehen; da der Winkel zwischen den beiden Lagen unendlich klein ist, so wird der Unterschied zwischen AB und der Projektion von A_1B_1 auf diese Gerade unendlich klein von zweiter Ordnung. Die Projektion sei A_2B_2. AA_2 und BB_2 sind dann den Projektionen der Geschwindigkeiten von A und B proportional, und da der Unterschied zwischen AA_2 und BB_2 von zweiter Ordnung ist, so werden die Projektionen der Geschwindigkeiten gleich grofs. Folglich:

Wenn eine Gerade AB sich auf irgendwelche Weise bewegt, so haben alle ihre Punkte Geschwindigkeiten, deren Projektionen auf die Gerade selbst gleich grofs sind. Sind Aa und Bb die Geschwindigkeiten von A und B, so wird ein dritter Punkt C der Geraden die Geschwindigkeit Cc haben, welche die Linien AB und ab nach demselben Verhältnis teilt, so dafs alle Punkte der Geraden Geschwindigkeiten haben,

welche auf demselben hyperbolischen Paraboloid liegen. Zu demselben Resultat gelangt man leicht auf analytischem Wege, indem man die Gleichung differentiiert, welche ausdrückt, dafs AB konstante Länge hat.

Im besonderen ist zu beachten, dafs wenn ein Punkt der Geraden eine Geschwindigkeit hat, welche senkrecht auf derselben steht, alle Punkte der Geraden Geschwindigkeiten haben, welche senkrecht auf derselben stehen.

Der oben bewiesene Satz läfst sich noch auf eine andere Weise ausdrücken. Mifst man die Projektionen der Geschwindigkeiten von A und B, indem man sie positiv rechnet, wenn sie auf die Verlängerung von AB fallen, so wird ihre Summe gleich Null. Diese Summe soll die Streckungsgeschwindigkeit heifsen, und der Satz läfst sich dann folgendermafsen ausdrücken:

Bei jeder Bewegung eines Körpers sind die Streckungsgeschwindigkeiten aller Geraden gleich Null.

Hierdurch läfst sich nun die gestellte Aufgabe leicht lösen. Kennt man die Geschwindigkeiten der Punkte A, B, C und sucht man die Geschwindigkeit des Punktes D, so läfst sich diese bestimmen, da man ihre Projektionen auf DA, DB und DC kennt. Die gegebenen Geschwindigkeiten müssen so beschaffen sein, dafs die Streckungsgeschwindigkeiten für AB, BC und AC gleich Null sind.

Anwendungen.

6. Wie bestimmt man die Normale und die Tangente für einen Punkt einer Cykloide?

7. Eine Strecke von konstanter Länge gleitet mit

ihren Endpunkten auf zwei gegebenen Geraden; wie bestimmt man die Tangente der Bahn, welche von einem beliebigen mit der Strecke fest verbundenen Punkte beschrieben wird? Welches ist der geometrische Ort für die augenblicklichen Drehpunkte?

8. Ein Körper dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um eine Gerade AB, welche selbst mit derselben Winkelgeschwindigkeit um eine feste Axe AC rotiert. Bestimme den geometrischen Ort für die augenblicklichen Axen.

9. Beweise, dafs zwei auf den Erzeugenden einer beliebigen geradlinigen Fläche (Regelfläche) senkrechte Kurven auf den Erzeugenden gleich grofse Stücke abschneiden.

10. Beweise, dafs ein Ebenenwinkel durch eine Rotation in jede konsekutive Lage gebracht werden kann.

11. Beweise, dafs ein Umdrehungskörpen durch eine Rotation in jede konsekutiwe Lage gebracht werden kann.

12. Durch eine gegebene Elementarbewegung erhält eine Gerade den Abstand r von der augenblicklichen Axe; welchen Winkel bildet die konjugierte Gerade mit der Axe?

13. Die Geschwindigkeit eines Punktes einer beliebigen Geraden L, auf die Gerade selbst projiciert, ist h. Wird die elementare Bewegung des Systems, welchem L angehört, in zwei Rotationen zerlegt, von denen die eine auf L fällt, so ist diese ω; man beweise, dafs das Produkt $h\omega$ für alle Geraden das Systems dasselbe ist.

DRITTES KAPITEL.

Linienkomplexe; Nulllinien.

---

19. Linienkomplexe. Da vier Bedingungen zur Bestimmung einer Linie im Raume gehören, so wird eine Linie, welche nur einer Bedingung unterworfen ist, einem dreifach unendlichen System angehören. Ein solches System heifst ein Linienkomplex. Die Linien (Strahlen) des Komplexes, welche durch einen beliebigen festen Punkt gehen, bilden eine gewisse Kegelfläche; die Ordnung dieser heifst die Ordnung des Komplexes. Alle Strahlen des Komplexes, welche in derselben Ebene liegen, umhüllen eine gewisse Kurve, und die Klasse dieser wird durch dieselbe Zahl bestimmt, welche die Ordnung des Komplexes angiebt. Die Anzahl der Strahlen durch einen beliebigen Punkt der Ebene (die Anzahl der Tangenten der umhüllten Kurve) wird nämlich gleich der Anzahl der Erzeugenden, in welchen die Ebene die zum Punkte gehörige Kegelfläche durchschneidet. Diese ist indessen ebenso grofs wie die Anzahl der Punkte, in welcher eine beliebige Gerade die Kegelfläche schneidet, was leicht ersichtlich wird, wenn man eine Ebene durch die Gerade und die Spitze der Kegelfläche legt.

Von den Komplexen soll hier nur der lineare Komplex oder der Komplex erster Ordnung betrachtet werden; bei diesem bilden alle Linien, welche durch einen beliebigen Punkt gehen, eine Ebene, und alle Linien, welche in derselben Ebene liegen, gehen durch denselben Punkt. Jede Ebene erhält also einen entsprechenden Punkt, welcher in der Ebene liegt, ebenso wie jeder Punkt eine entsprechende Ebene hat, welche

den Punkt enthält. Der Punkt heifst Brennpunkt der Ebene.

Enthält eine Ebene den Brennpunkt einer zweiten Ebene, so mufs die zweite Ebene den Brennpunkt der ersten enthalten, denn da die Durchschnittslinie der Ebenen den Brennpunkt der einen Ebene enthält, so mufs sie ein Strahl des Komplexes sein, und sie mufs dann auch den Brennpunkt der zweiten Ebene enthalten.

20. Konjugierte Linien. A und B seien zwei beliebige Punkte und die entsprechenden Ebenen mögen sich in einer Geraden L schneiden. Jede Ebene durch AB hat dann ihren Brennpunkt auf L; eine solche Ebene möge nämlich L in C schneiden; C mufs dann der Brennpunkt der Ebene sein, denn CA und CB sind Strahlen des Komplexes.

Umgekehrt mufs jede durch L gelegte Ebene ihren Brennpunkt auf AB haben, denn AB ist Durchschnittslinie der Ebene ABC und einer analogen Ebene ABD.

Alle Linien im Raume werden also zu je zweien konjugiert, indem sie derartig mit einander verbunden sind, dafs jede durch die eine Linie gelegte Ebene ihren Brennpunkt auf der anderen hat.

Eine Gerade eines Komplexes ist ihre eigene konjugierte Gerade, denn dieselbe mufs den Brennpunkt für jede durch sie gelegte Ebene enthalten. Der Komplex besteht also eben aus Doppelgeraden für die Geradenpaare des Raumes.

Aus dem Entwickelten läfst sich ohne Schwierigkeit schliefsen, dafs für alle Geraden derselben Ebene die konjugierten Geraden durch den Brennpunkt der Ebene gehen, und dafs für alle Ge-

raden durch denselben Punkt die konjugierten Geraden in der Ebene liegen, welche den Punkt zum Brennpunkt hat. Daraus folgt wiederum, dafs ein Strahl eines Komplexes, der eine beliebige Gerade schneidet, auch die konjugierte Gerade schneidet, nämlich im Brennpunkte derjenigen Ebene, welche sich durch den Strahl des Komplexes und die beliebige Gerade legen läfst.

21. Nulllinien. Eine Linie, mit Beziehung auf welche die Momentensumme eines Kräftesystems gleich Null ist, ist von Möbius eine Nulllinie genannt worden.

Alle Nulllinien bilden einen linearen Linienkomplex; sucht man nämlich die Nulllinien, welche durch einen beliebigen Punkt P gehen, so läfst sich das System auf eine Kraft R durch P und ein Kräftepaar G reducieren. Die Nulllinien durch P sind alle diejenigen Linien, welche senkrecht auf G stehen, und dieselben liegen also alle in derselbe Ebene.

Nun läfst sich leicht zeigen, dafs die beiden Bedeutungen, in denen die Benennung konjugierte Linien gebraucht ist, mit einander übereinstimmen. Mit Rücksicht auf den Komplex wurde nämlich gezeigt, dafs die einer Linie konjugierte Linie diejenige war, welche von allen den Strahlen geschnitten wird, die die erste Linie schneiden; von solchen Linien giebt es nur eine, da dieselbe Durchschnittslinie für zwei beliebige Ebenen sein mufs, welche ihren Brennpunkt auf der ersten Linie haben. Im zweiten Falle wurden zwei konjugierte Linien in der Weise bestimmt, dafs das System sich auf zwei Kräfte (oder die Elementarbewegung auf zwei Rotationen) reducieren liefs, welche auf die beiden Linien fielen. Nun mufs jede Nulllinie, welche die eine von diesen schneidet,

notwendigerweise auch die andere schneiden, da die Momentensumme sonst nicht Null werden würde, und die Bestimmung ist also in beiden Fällen dieselbe.

22. Nunmehr soll die Bedeutung des Brennpunkts bei der Elementarbewegung untersucht werden. Wird diese in eine Rotation durch den Brennpunkt und eine Translation zerlegt, so mufs letztere, der Definition der Nulllinien zufolge, senkrecht auf der Ebene sein. Da nun die Rotation den Brennpunkt nicht bewegt, so wird dessen Bewegung auf eine Bewegung senkrecht zur Ebene reduciert, während das im allgemeinen nicht für einen anderen Punkt der Ebene gelten kann. Fällt die Rotation in die Ebene selbst, so erhalten alle Punkte der Ebene Geschwindigkeiten, welche senkrecht zur Ebene gerichtet sind. Also:

Bei jeder Elementarbewegung giebt es im allgemeinen einen und nur einen Punkt einer beliebigen Ebene, dessen Geschwindigkeit senkrecht zur Ebene gerichtet ist. Dieser Punkt ist der Brennpunkt der Ebene. Man sieht hieraus, dafs eine Ebene, welche senkrecht auf dem Bahnelement eines Punktes in einer anderen Ebene steht, durch den Brennpunkt dieser Ebene gehen mufs, denn der Punkt mufs Brennpunkt für die erste Ebene sein, und die Durchschnittslinie der Ebenen ist dann eine Nulllinie. Das läfst sich auch so ausdrücken, dafs alle Punkte einer Ebene Bahnelemente beschreiben, deren Normalebenen durch den Brennpunkt der Ebene gehen.

Da eine Nulllinie der geometrische Ort für die Brennpunkte aller solcher Ebenen ist, welche die Linie enthalten, so erhält jeder Punkt der Linie eine Geschwindigkeit,

welche senkrecht auf der Linie steht. Umgekehrt mufs jede Linie mit einer solchen Bewegung (also eine Linie, welche senkrecht auf der Geschwindigkeit eines ihrer Punkte steht (18)) eine Nulllinie sein, denn jeder ihrer Punkte ist Brennpunkt für die Ebene, welche die Linie enthält und senkrecht auf der Geschwindigkeit des Punktes steht. So sind z. B. alle Linien, welche die augenblickliche Axe schneiden und senkrecht auf derselben stehen, Nulllinien. Sind die Punkte des Systems an gewisse Flächen gebunden, so werden die Normalen derselben Nulllinien für jede der möglichen Elementarbewegungen.

23. Bestimmung der augenblicklichen Axe. In einem System von parallelen Ebenen liegen die Brennpunkte dieser auf der Linie, welche der unendlich fernen Durchschnittslinie der Ebenen konjugiert ist, und diese ist, wie früher (16) gezeigt wurde, der augenblicklichen Axe parallel. Stehen die parallelen Ebenen senkrecht auf ihrer Brennpunktslinie, so gleitet diese Linie an sich selbst entlang und mufs deshalb selbst die augenblickliche Axe sein.

Oben wurde gezeigt (16), dafs der kürzeste Abstand zweier konjugierten Linien auf der augenblicklichen Axe (welche der in 16 betrachteten Linie R parallel ist) senkrecht steht; derselbe mufs zugleich die augenblickliche Axe schneiden, denn er ist eine Nulllinie und kann immer dahin gebracht werden die beiden Rotationen zu schneiden, welche die der Axe entsprechende resultierende Translation schneiden, so dafs er auch diese schneiden mufs. Dadurch erhält man eine neue Konstruktion der Axe, wenn die Richtungen der Geschwindigkeiten von drei Punkten bekannt sind.

A und B seien zwei von den Punkten; die Ebenen,

welche senkrecht auf den Geschwindigkeiten dieser Punkte stehen, schneiden sich in der Linie, welche AB konjugiert ist. L sei die Gerade, auf welcher der kürzeste Abstand der beiden Linien liegt. Bestimmt man auf ähnliche Weise eine analoge Linie L_1, so wird die augenblickliche Axe die Linie, welche den kürzesten Abstand zwischen L und L_1 enthält.

24. Die Charakteristik. Es wurde gezeigt, dafs zwei konjugierte Linien sich derartig entsprechen, dafs wenn eine Ebene sich um die eine Linie dreht, der Brennpunkt dieser Ebene die andere Linie durchläuft. Hat man eine Ebene und eine durch den Brennpunkt gehende Gerade, so ist diese die Durchschnittslinie zweier Ebenen, welche ihre Brennpunkte in der gegebenen Ebene haben; jede Linie durch den Brennpunkt hat deshalb ihre konjugierte Linie in der Ebene. Steht die Linie durch den Brennpunkt senkrecht auf der Ebene, so heifst ihre konjugierte Linie die Charakteristik der Ebene.

Die Charakteristik enthält diejenigen Punkte der Ebene, welche bei der Elementarbewegung in der Ebene bleiben, denn die Bewegung dieser ist eine Rotation um die Senkrechte im Brennpunkt. Da die Bewegung des Brennpunkts normal zur Ebene gerichtet ist, so steht die Charakteristik senkrecht auf der Geschwindigkeit des Brennpunkts. Auf der Charakteristik giebt es einen Punkt, dessen Geschwindigkeit in dieselbe hineinfällt, nämlich die Projektion des Brennpunkts auf die Charakteristik. Eine durch diesen Punkt und die Normale im Brennpunkt gelegte Ebene hat den Punkt zum Brennpunkt und die Normale zur Charakteristik.

Im allgemeinen wird jede Tangente der Bahn eines Punktes die Charakteristik für eine gewisse Ebene sein;

da der Punkt Brennpunkt für die Normalebene der Bahn ist, so mufs diese nämlich die konjugierte Linie der Tangente enthalten, und die Tangente ist dann die Charakteristik für diejenige Ebene, welche die Tangente enthält und senkrecht auf der konjugierten Linie der Tangente steht.

25. Bewegung mit gebundenen Punkten. Ist die Bewegung eines Körpers fünf Bedingungen unterworfen, so werden die Punkte des Körpers im allgemeinen gezwungen sein bestimmte Kurven zu beschreiben. Es möge beispielsweise angenommen werden, dafs fünf Punkte des Körpers an gegebene Flächen gebunden sind. Die funfzehn Koordinaten der Punkte müssen dann vierzehn Gleichungen genügen, nämlich den fünf Gleichungen, welche ausdrücken, dafs dieselben auf den gegebenen Flächen liegen, und neun Gleichungen, welche die gegenseitigen Abstände der Punkte bestimmen. Auf ähnliche Weise sieht man, dafs wenn vier Punkte an gegebene Flächen gebunden sind, im allgemeinen auch jeder andere Punkt an eine Fläche gebunden wird, so dafs der Körper aus jeder Lage in unendlich viele Nachbarlagen übergehen kann. Doch werden, wie sogleich gezeigt werden soll, gewisse Punkte des Körpers nur Linienelemente beschreiben. Für eine solche Bewegung gilt folgender Satz *):

Die Normalen der Flächen, auf welchen die Systempunkte sich bewegen können, schneiden zwei feste gerade Linien.

Die vier Punkte, welche an gegebene Flächen ge-

---

*) Schönemann: Berliner Monatsb. 1855.
Mannheim: Bull. de la société phil. 1866.

bunden sind, seien A, B, C, D und die Normalen der Flächen in diesen Punkten seien a, b, c, d. Diese vier Linien sind Nulllinien für alle die unendlich vielen Elementarbewegungen, welche der Körper erhalten kann (23).

Es giebt zwei Linien l und m, welche die vier Normalen schneiden. Drei von den Normalen bestimmen nämlich ein Hyperboloid, und dessen Durchschnittspunkte mit der vierten Normale bestimmen l und m. Diese beiden Linien sind für alle Bewegungen konjugiert (21).

Nun ziehe man von einem beliebigen Punkte P eine Linie p, welche l und m schneidet; diese ist eine Nulllinie für alle Bewegungen; alle Elementarbewegungen von P sind deshalb senkrecht zu p gerichtet, und diese ist also Normale derjenigen Fläche, welche geometrischer Ort für P ist.

Die Punkte, welche auf den Linien l und m liegen, verhalten sich auf eine besondere Weise, indem sie nur Linienelemente beschreiben; da die beiden Linien nämlich bei allen Bewegungen konjugiert sind, so ist die Bewegung der einen immer eine elementare Rotation um die andere.

Die Normalen bilden ein zweifach unendliches System von Linien, welche allen denjenigen Komplexen gemeinschaftlich sind, welche allen möglichen Bewegungen entsprechen; ein solches System heifst eine Kongruenz. Die Kongruenz ist bestimmt durch vier Linien; alle ihre Strahlen schneiden zwei feste Linien, welche die Leitlinien des Komplexes heifsen.

Die Normalen der Flächen, welche von den Punkten einer Geraden beschrieben werden, schneiden diese und beide Leitlinien und liegen deshalb auf einem Hyperboloid.

26. Sind fünf Punkte eines Systems an gegebene, von einander unabhängige Flächen gebunden, so ist die Bewegung, wie eben gezeigt, bestimmt. Man konstruiert leicht die hierzu gehörige Centralaxe; die Normalen von vier Flächen bestimmen nämlich die beiden konjugierten Linien l und m, und die Centralaxe steht senkrecht auf dem kürzesten Abstande α dieser beiden; eine andere Kombination von vier Normalen bestimmt die analoge Linie β; die Centralaxe fällt dann mit dem kürzesten Abstande von α und β zusammen.

Die Elementarbewegung läſst sich in zwei Rotationen zerlegen, welche auf die konjugierten Linien l und m fallen. Verschiebt man die beiden Linien bis an einen Punkt der Centralaxe, so fallen diese drei Linien in dieselbe Ebene, und die Resultante der beiden Rotationen muſs auf die Axe fallen. Dadurch ist das Verhältnis der beiden Rotationen bestimmt.

Anwendungen.

14. Die Normale einer Ebene bildet den Winkel C mit der augenblicklichen Axe; man bestimme die Abstände des Brennpunktes und der Charakteristik von der Axe und zeige, daſs das Produkt dieser Abstände für alle Ebenen dasselbe ist.

15. In dem bewegten System werden zwei beliebige Ebenen angenommen, welche senkrecht auf einander stehen, und deren Durchschnittslinie senkrecht auf der augenblicklichen Axe ist. Beweise, daſs das Produkt der Abstände der Brennpunkte der beiden Ebenen von der Axe konstant ist, und daſs dasselbe für die Abstände der Charakteristiken von der Axe gilt.

16. Beweise, daſs der geometrische Ort für die Axen

derjenigen Bewegungen, welche einer gegebenen Linienkongruenz entsprechen, ein Konoid von dritter Ordnung ist.

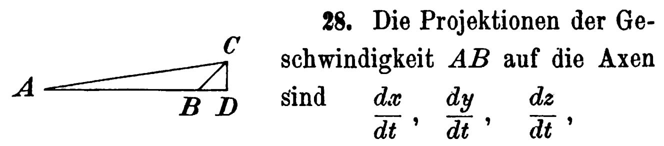
17. Beweise, dafs die Geschwindigkeiten einer beliebigen Elementarbewegung einen Linienkomplex von zweiter Ordnung bilden.

18. Durch die in 26 betrachtete Bewegung erhält man fünf analoge Linienpaare l, m. Von einem beliebigen Punkte aus werden fünf Linien gezogen, von denen jede eins der fünf Linienpaare schneidet; beweise, dafs die fünf Linien in der Normalebene des Bahnelements des Punktes liegen.

VIERTES KAPITEL.

Über die Beschleunigung eines Punktes.

27. Zerlegung und Zusammensetzung von Beschleunigungen. Da die Beschleunigung eines Punktes sich durch eine gerade Linie nach Gröfse und Richtung darstellen läfst, so kann man Beschleunigungen ebenso wie Kräfte zerlegen und zusammensetzen; doch sind diese Operationen vorläufig von rein formaler Bedeutung. Namentlich ist die Zerlegung der Beschleunigung nach den Axen eines rechtwinkligen Koordinatensystems und nach der Tangente und Hauptnormale der Bahn zu beachten.



28. Die Projektionen der Geschwindigkeit AB auf die Axen sind $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$,

während die Geschwindigkeit AC im konsekutiven Punkte der Bahn die Projektionen

$$\frac{dx}{dt} + \frac{d^2x}{dt^2}dt, \quad \frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}dt, \quad \frac{dz}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}dt$$

hat; die geometrische Differenz BC der Geschwindigkeiten hat deshalb die Projektionen

$$\frac{d^2x}{dt^2}dt, \quad \frac{d^2y}{dt^2}dt, \quad \frac{d^2z}{dt^2}dt,$$

und die Projektionen der Beschleunigungen werden also

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}, \tag{12}$$

woraus hervorgeht, dafs die Projektionen der Beschleunigung eines bewegten Punktes auf die Axen eben die Beschleunigungen der Projektionen des Punktes auf die Axen sind.

29. Da die Beschleunigung in der oskulierenden Ebene der Bahn liegt, so läfst dieselbe sich in zwei Komponenten zerlegen, die tangentielle a_t nach der Tangente und die centripetale a_n nach der Hauptnormale. Um diese zu finden projiciert man C auf AB im Punkte D. Da der Winkel ε zwischen den Tangenten (der Kontingenzwinkel) unendlich klein ist, so hat man, wenn man Glieder von höherer als der ersten Ordnung vernachlässigt,

$$BD = AC\cos\varepsilon - AB = d\cdot\frac{ds}{dt}; \quad DC = \frac{ds}{dt}\varepsilon;$$

nun ist indessen

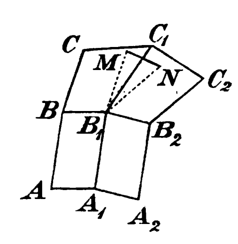
$$ds = \rho\varepsilon,$$

worin ρ den Krümmungsradius bedeutet; schafft man mit Hülfe hiervon ε fort und dividiert durch dt, so erhält man die gesuchten Komponenten:

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}. \tag{13}$$

30. Die Beschleunigung der zusammengesetzten Bewegung. Oben wurde gezeigt, dafs die Geschwindigkeit einer zusammengesetzten Bewegung die Resultante der Geschwindigkeiten der zusammensetzenden Bewegungen sei; es wird sich zeigen, dafs ein ähnlicher Satz nur in speciellen Fällen für die Beschleunigungen gilt.

Ein Punkt möge in zwei konsekutiven Zeitelementen dt die zu einer gewissen Kurve gehörigen Bogenelemente AB und BC beschreiben, während diese gleichzeitig in die Lagen $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ übergehen; die wirklichen Bahnelemente sind dann AB_1 und B_1C_2, und man findet die Beschleunigung, wenn man die geometrische Differenz von diesen durch dt^2 dividiert; nun hat man, wenn $+$ und $-$ geometrische Addition und Subtraktion bedeuten,



$$\begin{aligned} B_1C_2 - AB_1 &= B_1C_1 + C_1C_2 - AB - BB_1 \\ &= BC - AB + B_1B_2 - BB_1 \\ &\quad + B_1C_1 - BC + C_1C_2 - B_1B_2 . \end{aligned}$$

Hier findet man in der ersten Zeile nach Division durch dt^2 eben die geometrische Summe der Beschleunigungen der zusammenzetzenden Bewegungen. Die Glieder in der zweiten Zeile heben sich gegenseitig auf, sobald die Vierecke Parallelogramme sind, sobald also die mitführende Bewegung eine Translation ist (oder sich in dem betrachteten Augenblick mit einer solchen in Berührung von zweiter Ordnung befindet). Folglich:

Die Beschleunigung einer Bewegung, welche aus zwei anderen, von denen die eine eine Translation ist, zusammengesetzt ist, ist die Resul-

tante der Beschleunigungen der zusammensetzenden Bewegungen.

Kehrt man zu dem allgemeinen Fall zurück und zieht $B_1 M$ und $B_1 N$ beziehungsweise parallel und gleich BC und $B_2 C_2$, so hat man

$$B_1 C_1 - BC + C_1 C_2 - B_1 B_2 = MC_1 + C_1 N = MN.$$

Die Beschleunigung der zusammengesetzten Bewegung hat also folgende drei Komponenten:

1. Die Beschleunigung der Bewegung auf der als fest betrachteten Kurve ABC.
2. Die Beschleunigung in der Bewegung der Kurve, indem der Punkt fest mit dieser verbunden ist, und
3. Die Beschleunigung $MN : dt^2$.

MN ist nur abhängig von den Bewegungen in dem einen Zeitelement. Zerlegt man nämlich die Bewegung von ABC in eine Translation und eine Rotation um eine durch A gehende Axe, so kann man MN dem Bogenelement gleichsetzen, welches in der Zeit $2dt$ von B beschrieben wird. Bildet die relative Geschwindigkeit v_1 den Winkel α mit der Rotationsaxe, und ist ω die Winkelgeschwindigkeit, so wird

$$MN = AB \sin\alpha \,.\, 2\omega dt\,,$$

und also die dritte Komponente der absoluten Beschleunigung

$$2 v_1 \omega \sin\alpha. \tag{14}$$

Allgemeiner läſst sich wie oben eine zusammengesetzte Bewegung durch die Gleichungen (8) bestimmen, und man erhält dann

$$d^2x = \frac{d^2x}{dt_1^2} dt_1^2 + \frac{d^2x}{dt_2^2} dt_2^2 + 2 \frac{d^2x}{dt_1 dt_2} dt_1 dt_2\,,$$

wodurch, wenn man $t_1 = t_2 = t$ setzt und durch dt^2 dividiert, die Projektion der totalen Beschleunigung auf

die x-Axe als die Summe von drei anderen bestimmt wird; die beiden ersten sind die Projektionen der Beschleunigungen der zusammensetzenden Bewegungen, während die dritte

$$2\frac{d\frac{dx}{dt_1}}{dt_2},$$

das Doppelte von dem ist, was man die Geschwindigkeit nennen kann, womit die Geschwindigkeit der einen der zusammensetzenden Bewegungen sich auf Grund der anderen verändert. Damit stimmt es, dafs MN oben das Doppelte der geometrischen Differenz zwischen AB und A_1B_1 ist.

Anwendungen.

19. Beschleunigung eines Punktes, welcher eine Cykloide beschreibt, wenn der rollende Kreis sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt.

Der augenblickliche Drehpunkt fällt in jedem Augenblick auf den Berührungspunkt des Kreises und der Geraden. Die Geschwindigkeit des Punktes ist gleich der Länge der Normalen, multipliciert mit der Winkelgeschwindigkeit. A und A_1 seien zwei konsekutive Lagen des Punktes, AN und A_1N_1 die entsprechenden Normalen. Wird der Kreis aus der zweiten Lage in die erste zurückgeschoben, so fällt A_1N_1 in eine Lage A_2N, wo AA_2 ein Element des Kreises ist. Da die Geschwindigkeiten den Normalen proportional und senkrecht auf denselben sind, so wird die Beschleunigung senkrecht auf AA_2 und geht deshalb durch den Mittelpunkt des rollenden Kreises. Die Gröfse derselben ist

$$\omega \cdot \frac{AA_2}{dt} = \omega \frac{NN_1}{dt} = \omega^2 r,$$

worin r den Radius des Kreises bedeutet.

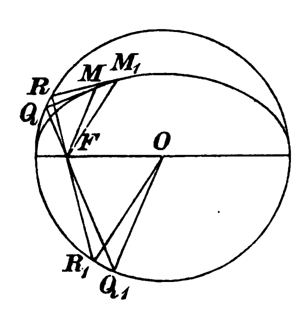
20. **Die Planetenbewegung.** Das erste Keplersche Gesetz sagt, dafs der Planet sich in einer durch den Mittelpunkt der Sonne gehenden Ebene so bewegt, dafs der Radius vektor, welcher den Mittelpunkt des Planeten mit dem der Sonne verbindet, Flächenräume beschreibt, welche den angewandten Zeiten proportional sind. Nun seien AB und BC zwei konsekutive Bahnelemente, während F der Mittelpunkt der Sonne ist. Das Gesetz sagt dann, dafs die Dreiecke FAB und FBC gleich grofs sind, woraus folgt, dafs AC durch FB halbiert wird. Indessen wurde früher gezeigt, dafs die Beschleunigung für B durch die Mitte von AC geht. Aus dem Gesetze folgt also, dafs die Beschleunigung bei der Planetenbewegung beständig gegen den Mittelpunkt der Sonne gerichtet ist. Umgekehrt sieht man, dafs die Dreiecke gleich grofs werden, wenn die Beschleunigung gegen F gerichtet ist, oder dafs bei jeder Bewegung, bei welcher die Beschleunigung gegen einen festen Punkt gerichtet ist, die vom Radius vektor beschriebenen Flächenräume den Zeiten proportional sind.

Da AB und BC den zugehörigen Höhen umgekehrt proportional sind, so läfst sich das erste Keplersche Gesetz auch folgendermafsen ausdrücken:

Die Geschwindigkeiten sind ihren Abständen (den Abständen der Tangenten) vom Mittelpunkt der Sonne umgekehrt proportional.

Zufolge des zweiten Keplerschen Gesetzes ist die Planetenbahn eine Ellipse, deren einer Brennpunkt

im Mittelpunkt der Sonne liegt. Nunmehr soll gezeigt werden, wie sich hieraus die Gröfse der Beschleunigung bestimmen läfst.



Es sei FMM_1 das in der Zeit dt beschriebene Flächenelement; der Inhalt desselben ist kdt, wo k eine Konstante bedeutet. Von F fälle man FQ und FR senkrecht auf die Tangenten in M und M_1. Q und R liegen dann wie bekannt auf der Peripherie das über der grofsen Axe $2a$ als Durchmesser beschriebenen Kreises. Verlängert man FQ und FR bis Q_1 und R_1, so sind FQ_1 und FR_1 senkrecht auf den beiden konsekutiven Geschwindigkeiten und denselben proportional, und $R_1 Q_1$ ist deshalb senkrecht auf der Beschleunigung. Ist O der Mittelpunkt, so werden also die Richtungen der Beschleunigungen in M und M_1 sowohl durch FM und FM_1 als auch durch OQ_1 und OR_1 bestimmt, so dafs diese Linien paarweise parallel sind; nun erhält man durch die Betrachtung der Dreiecke $OR_1 Q_1$ und FMM_1

$$\frac{a \,.\, R_1 Q_1}{2kdt} = \frac{a^2}{FM \,.\, FM_1}$$

oder

$$\frac{R_1 Q_1}{dt} = \frac{2ka}{FM \,.\, FM_1};$$

nun ist $FR \,.\, FR_1 = a^2(1-e^2)$; $FR \,.\, ds = 2kdt$, folglich

$$FR_1 = \frac{a^2(1-e^2)}{2k} \,.\, v,$$

woraus wiederum

$$R_1 Q_1 = \frac{a^2(1-e^2)}{2k} [dv],$$

worin v die Geschwindigkeit bedeutet und $[dv]$ die geometrische Differenz zwischen den konsekutiven Geschwindigkeiten. Man findet deshalb die Beschleunigung

$$\left[\frac{dv}{dt}\right] = \frac{4k^2}{a(1-e^2)} \cdot \frac{1}{f^2},$$

worin f den Brennstrahl bedeutet. Nennt man die ganze Umlaufszeit τ, so hat man

$$\pi a b = k\tau,$$

und dadurch wird die Beschleunigung

$$\frac{a^3}{\tau^2} \cdot \frac{4\pi^2}{f^2}.$$

Das dritte Keplersche Gesetz sagt, dafs das Verhältnis $a^3 : \tau^2$ konstant ist. Verbindet man dies mit dem obenstehenden Ausdruck, so sieht man, dafs wenn verschiedene Planeten in dieselbe Entfernung von der Sonne kommen, die Beschleunigungen gleich grofs werden.

21. Ein Punkt beschreibt einen Kreis mit konstanter Geschwindigkeit; die Beschleunigung desselben ist aus zwei anderen zusammengesetzt, von denen die eine nach Gröfse und Richtung konstant ist; beweise, dafs die andere durch einen festen Punkt geht.

22. Der Krümmungsradius der Cykloide läfst sich leicht bestimmen, wenn man die Projektion der Beschleunigung auf die Normale sucht (Vergl. 29). Da die Beschleunigung gleich $\omega^2 r$ und gegen den Kreismittelpunkt gerichtet ist, so wird die Projektion $\frac{1}{2}\omega^2 n$, wo n die Normale ist. Die Geschwindigkeit ist ωn, so dafs man hat

$$\omega^2 n^2 = \rho \cdot \tfrac{1}{2}\omega^2 n \quad \text{oder} \quad \rho = 2n.$$

23. Beweise, dafs die Beschleunigung $v^2 : k$ ist, wo v die Geschwindigkeit bedeutet und $2k$ die Länge der

Sehne, welche der Krümmungskreis auf einer durch den Punkt in der Richtung der Beschleunigung gezogenen Geraden abschneidet.

24. Die Beschleunigung eines Punktes ist konstant nach Gröfse und Richtung; beweise, dafs die Bahn eine Parabel ist; bestimme den Parameter derselben, wenn die konstante Beschleunigung und die Geschwindigkeit im Scheitelpunkte gegeben sind.

25. Wie grofs wird für die in der vorhergehenden Aufgabe erwähnte Bewegung die Geschwindigkeit in einem beliebigen Punkte der Bahn, und wie läfst sich der Krümmungskreis dieses Punktes konstruieren?

26. Ein Punkt bewegt sich in einer ebenen Bahn; beweise, dafs die Komponenten der Beschleunigungen nach dem Radius vektor und senkrecht darauf die folgenden sind:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad \text{und} \quad \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\left(r^2\,\frac{d\theta}{dt}\right).$$

27. Die Bewegung eines Punktes ist bestimmt durch die Gleichungen

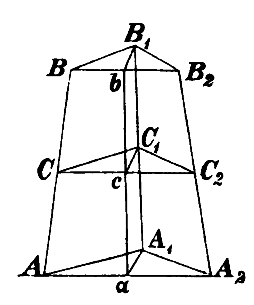
$$\frac{dx}{dt} = ay; \quad \frac{dy}{dt} = bx.$$

Beweise, dafs die Bahn ein Kegelschnitt ist, dessen Axen auf die Koordinatenaxen fallen, und dafs die Richtung der Beschleunigung durch den Anfangspunkt geht.

FÜNFTES KAPITEL.

Über die Beschleunigungen eines Punktsystems.

31. Die Punkte einer geraden Linie haben bei einer beliebigen Bewegung Beschleunigungen, von welchen zwei die übrigen bestimmen. Um das zu zeigen, betrachte man die Linie in den konsekutiven Lagen AB, A_1B_1 und A_2B_2. Die Beschleunigungen für die Endpunkte lassen sich dann, da hier nur das Verhältnis der Beschleunigungen in Betracht kommt, durch die Medianen B_1b und A_1a messen. Für einen beliebigen Punkt C_1 der Linie wird die Beschleunigung dann C_1c, welche B_1A_1 und ba in proportionale Teile teilt. Hieraus ergiebt sich:



Die Beschleunigungen der Punkte einer geraden Linie sind Erzeugende derselben Art von einem hyperbolischem Paraboloid, und ihre Endpunkte liegen auf einer Erzeugenden der zweiten Art.

Das Paraboloid ist bestimmt durch die Linie und die Beschleunigungen (abgetragen nach einem beliebigen Maſsstab) von zwei Punkten der Linie.

32. Nun möge ein Dreieck ABC betrachtet werden, wo man die Beschleunigungen Aa, Bb und Cc kennt, und wo die Beschleunigung Dd für einen beliebigen Punkt der Ebene des Dreiecks gesucht wird. AD möge BC in M schneiden. Der Punkt M hat die Beschleunigung Mm, welche BC und bc in proportionale Teile

teilt; dadurch ist d bestimmt, da AM und am durch Dd in proportionale Teile geteilt wird.

Kennt man die Beschleunigungen für die vier Eckpunkte eines Tetraeders, so läſst sich nun leicht die Beschleunigung für einen beliebigen Punkt des Raumes bestimmen, indem man zuerst die Beschleunigung des Punktes bestimmt, in welchem die eine Seitenfläche von einer Linie durch den Punkt nach der gegenüberliegenden Ecke geschnitten wird.

33. Betrachtet man alle Systempunkte A, B, C... und die Endpunkte a, b, c ... ihrer Beschleunigungen, so hat man zwei homographische Punktsysteme, da dieselben einander Punkt für Punkt und Gerade für Gerade entsprechen. Da zugleich die gepaarten Punkte auf zwei gepaarten Geraden ähnliche Punktreihen bilden, so ist die homographische Verbindung eine solche, bei der die unendlich ferne Ebene sich selbst entspricht und wo deshalb die Koordinaten der gepaarten Punkte verbunden sind durch Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} x_1 &= ax + by + cz + d\,, \\ y_1 &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1\,, \\ z_1 &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2\,. \end{aligned} \tag{15}$$

Zwei solche Systeme haben einen und im allgemeinen nur einen Doppelpunkt, das heiſst einen solchen Punkt, der mit dem ihm entsprechenden Punkte zusammenfällt. Dieser Punkt, der also die Beschleunigung Null hat, heiſst der Nullpunkt der Beschleunigungen. Ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} a-1 & b & c \\ a_1 & b_1-1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2-1 \end{vmatrix}$$

gleich Null, so giebt es eine Linie, deren Punkte sämtlich Nullpunkte sind.

Es ist zu beachten, dafs man bei Untersuchung der gegenseitigen Abhängigkeit der Beschleunigungen jeden beliebigen Punkt als Nullpunkt der Beschleunigungen betrachten kann, da man zu allen Beschleunigungen eine Strecke addieren kann, welche der Beschleunigung in dem betrachteten Punkt gleich und entgegengesetzt ist; dadurch erteilt man in Wirklichkeit dem ganzen Systeme eine translatorische Bewegung, und die Geschwindigkeit dieser kann man überdies so wählen, dafs der betrachtete Punkt in den beiden Zeitelementen in Ruhe ist.

34. Die Streckungsbeschleunigung einer Geraden. Die Gerade OA drehe sich um den festen Punkt O; man hat dann für den Punkt A, wenn OA gleich l ist,

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

woraus

$$xdx + ydy + zdz = 0$$

und

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} + z\frac{d^2z}{dt^2} = -\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

Dividiert man mit l, so hat man auf der linken Seite die Projektion der Beschleunigung von A auf OA, auf der rechten das Quadrat der Geschwindigkeit dividiert durch die Länge der Linie und mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen.

Ist der Punkt O nicht in Ruhe, so läfst derselbe sich auf die oben angegebene Weise in Ruhe bringen; dadurch wird die geometrische Differenz zwischen den Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen der Endpunkte nicht verändert. Definiert man die Streckungsbeschleunigung auf ähnliche Weise wie früher die Streckungs-

geschwindigkeit, und bezeichnet man die geometrische Differenz zwischen den Geschwindigkeiten der Endpunkte als Geschwindigkeitsdifferenz, so hat man also folgenden Satz:

Bei einer beliebigen Bewegung einer geraden Linie ist die Streckungsgeschwindigkeit derselben mit entgegengesetztem Vorzeichen gleich dem Quadrat der Geschwindigkeitsdifferenz dividiert durch die Länge der Linie.

35. Bewegung in einer Ebene. O sei der Nullpunkt der Beschleunigungen, welcher als ruhend betrachtet werden kann, während AB, A_1B_1, A_2B_2 drei konsekutive Lagen von AB sind. Da O gemeinsamer Drehungspunkt*) für AB, A_1B_1 und A_2B_2 ist, so ist er auch Drehungspunkt für die ähnlichen Dreiecke AA_1A_2 und BB_1B_2 und deshalb auch für ihre Medianen A_1a und B_1b, oder für die Beschleunigungen der beiden Punkte; folglich:

Bei einer Bewegung in einer Ebene ist der Nullpunkt der Beschleunigungen der Drehungspunkt für die Beschleunigungen von zwei beliebigen Punkten.

Kennt man die Beschleunigungen Aa und Bb, so konstruiert man also leicht den Nullpunkt, denn dieser ist der Durchschnittspunkt zweier Kreise, welche beide durch den Durchschnittspunkt der beiden Linien gehen, und von denen der eine durch A und B, der andere durch a und b geht. Die Beschleunigung eines dritten Punktes C wird leicht dadurch bestimmt, daſs die Dreiecke ABC und abc ähnlich sind. Die gegebenen Beschleunigungen

---

*) Julius Petersen, Methoden und Theorien, Kopenh. 1879, S. 70 ff.

können beliebig sein, wenn nur die Streckungsbeschleunigung für AB negativ ist; das wird ohne Schwierigkeit einleuchtend, wenn man die eine Beschleunigung durch eine hinzugefügte Bewegung gleich Null macht.

36. Bewegung im Raum. Es wurde oben gezeigt, wie die Beschleunigungen von vier Punkten die Beschleunigung jedes anderen Punktes bestimmen. Hier ist indessen eine genauere Untersuchung erforderlich, denn, wie sich ergeben wird, sind die vier Beschleunigungen nicht von einander unabhängig, sondern drei derselben bestimmen die vierte. Deshalb möge angenommen werden, dafs die Beschleunigungen Aa, Bb und Cc bekannt sind, und die Beschleunigung Dd gesucht wird, wenn D nicht in der Ebene ABC liegt. Die gegebenen Beschleunigungen sind der Bedingung unterworfen, dafs die Streckungsbeschleunigungen von AB, BC und CA negativ sind. Zunächst läfst sich nun zeigen, dafs diese Streckungsbeschleunigungen ausreichen um die Richtung der augenblicklichen Axe zu bestimmen.

Es wurde nämlich gezeigt, dafs die Streckungsbeschleunigungen die Geschwindigkeitsdifferenzen der Linien der Gröfse nach bestimmen. γ sei diejenige, welche der Seite AB entspricht; γ ist dann die dritte Seite eines Dreiecks, dessen beiden anderen Seiten die Geschwindigkeiten von A und B sind; diese beiden Seiten haben gleich grofse Projektionen auf AB, da die Streckungsgeschwindigkeit einer Linie Null ist; hieraus folgt, dafs γ senkrecht auf AB ist; die drei Geschwindigkeitsdifferenzen α, β, γ bilden ein Dreieck, da ihre geometrische Summe Null ist; da die Seiten dieses Dreiecks senkrecht auf den entsprechenden Seiten von ABC stehen, so gilt dasselbe für seine Projektion auf die Ebene ABC; diese

Projektion ist deshalb dem Dreieck ABC ähnlich. Da nur die Verhältnisse und nicht die absolute Gröſse Bedeutung haben, so kann man annehmen, daſs die Projektion und ABC kongruent sind.

Da alle Geschwindigkeiten eines Punktsystems gleich groſse Projektionen auf die augenblickliche Axe (die Gleitung) haben, so werden alle Geschwindigkeitsdifferenzen senkrecht auf dieser. Die augenblickliche Axe steht deshalb senkrecht auf der Ebene $\alpha\beta\gamma$. Folglich:

Die augenblickliche Axe steht senkrecht auf der Ebene eines Dreiecks α, β, γ, dessen Seiten den Geschwindigkeitsdifferenzen proportional sind, und dessen Projektion das um einen rechten Winkel in seiner Ebene gedrehte Dreieck ABC ist.

Um die Richtung der augenblicklichen Axe zu finden hat man also folgende Aufgabe zu lösen:

Die Lage eines Dreiecks zu bestimmen, wenn man die Gestalt seiner Projektion auf eine gegebene Ebene kennt.

Die beiden Dreiecke seien ABC und abc; einem Punkte M in der Ebene des einen Dreiecks entspricht ein Punkt m in der Ebene des anderen Dreiecks; dieser Punkt ist leicht bestimmt, da Linien durch die Eckpunkte und die Punkte in beiden Dreiecken die gegenüberliegenden Seiten nach Verhältnissen teilen, welche paarweise gleichgroſs sind.

Es soll nun versucht werden, in den beiden Ebenen zwei einander entsprechende rechte Winkel zu finden. Da die Gröſse keine Rolle spielt, so kann man annehmen, daſs ABC und ABc die beiden Dreiecke wären. Man zeichne dann einen Kreis, der seinen Mittelpunkt auf

AB hat und durch C und c geht; schneidet dieser Kreis AB in D und E, so entsprechen die rechten Winkel DCE und DcE einander.

Nun läſst die gestellte Aufgabe sich leicht lösen, denn ein rechter Winkel kann nur als rechter Winkel projiciert werden, wenn der eine von seinen Schenkeln der Projektionsebene parallel ist. Ist das z. B. Dc, so wird der Winkel a zwischen den beiden Ebenen bestimmt durch

$$\frac{cE \cos a}{CE} = \frac{cD}{CD},$$

so daſs man haben muſs

$$cE \,.\, CD \geqq CE \,.\, cD.$$

Die Aufgabe hat also eine und nur eine reelle Lösung. Bei Bestimmung der Richtung der augenblicklichen Axe erhält man indessen zwei reelle Lösungen, da die Projektion des Dreiecks α, β, γ auf die Ebene ABC auf zwei Arten liegen kann, von denen man die eine erhält, wenn man die andere um 180° in ihrer Ebene dreht.

ZWEITER ABSCHNITT.

Über endliche Bewegungen.

SECHSTES KAPITEL.

Reduktion der Bewegung auf eine Rollung.

37. Im Vorhergehenden wurde gezeigt, dafs jede Elementarbewegung eines unveränderlichen Punktsystems in einer Ebene eine Rotation sei. Wird die Bewegung auf irgend welche Weise fortgesetzt, so wird also jedem Zeitelement ein gewisser Drehpunkt (Rotationscentrum) entsprechen.

Alle Drehpunkte bilden in der Ebene eine gewisse Kurve K, während sie in dem bewegten Systeme eine andere mit diesem fest verbundene Kurve K_1 bilden. A, B, C... seien konsekutive Punkte der ersten, A_1, B_1, C_1 ... die entsprechenden Punkte der zweiten Kurve. Die einander entsprechenden Bogenelemente AB und A_1B_1 u. s. w. sind dann paarweise gleich grofs. Die Rotation um A mufs B_1 zum Zusammenfallen mit B bringen, da dieser Punkt im folgenden Zeitelement Drehpunkt ist. Die Rotation in diesem Zeitelement bringt dann C_1 zum Zusammenfallen mit C und so fort, so dafs die Kurve K_1 während der Bewegung auf der Kurve K

rollt ohne zu gleiten. Da die Bewegung dadurch bestimmt ist, so sieht man also, dafs jede Bewegung eines unveränderlichen Punktsystems in einer Ebene dadurch hervorgerufen werden kann, dafs man eine mit dem Punktsystem fest verbundene Kurve auf einer festen Kurve in der Ebene rollen läfst ohne zu gleiten.

Auf eine ähnliche einfache Weise kann man jede beliebige Bewegung eines Körpers im Raume mit einem festen Punkte O auffassen. Die successiven Elementarbewegungen sind hier Rotationen um durch O gehende Axen. Diese Axen bilden eine feste Kegelfläche im Raum, während sie im Körper eine andere mit diesem fest verbundene Kegelfläche bilden, welche ebenso wie die erste ihre Spitze in O hat. Folglich:

Jede Bewegung eines Körpers mit einem festen Punkte im Raume kann dadurch hervorgerufen werden, dafs eine mit dem Körper fest verbundene Kegelfläche mit ihrer Spitze in dem festen Punkte auf einer festen Kegelfläche im Raume mit derselben Spitze rollt ohne zu gleiten.

Es sollen nun einige specielle einfache Bewegungen betrachtet werden.

38. Eine Strecke AB von konstanter Länge gleitet mit ihren Endpunkten auf zwei aufeinander senkrechten Geraden, welche sich in O schneiden.

Um den augenblicklichen Drehpunkt zu finden, errichte man in A und B Senkrechte auf den beiden festen Geraden. Diese beiden Senkrechten schneiden sich in einem Punkte C, dessen Abstand von O gleich AB ist.

Die Kurve K ist also ein Kreis um O mit dem Radius AB. Da der Winkel ACB ein Rechter ist, so ist die Kurve K_1 ein Kreis über AB als Durchmesser. Die Bewegung ist deshalb dieselbe wie diejenige, welche entsteht, wenn ein Kreis in einem anderen Kreise mit doppelt so grofsem Radius rollt.

Die Mitte der Strecke beschreibt einen Kreis um O mit dem Radius $\frac{1}{2}AB$. Ein anderer Punkt möge AB in die Abschnitte a und b teilen. Hat dieser Punkt die Koordinaten x und y, die festen Geraden als Axen genommen, und ist v der Winkel der Strecke mit der x-Axe, so hat man

$$x = a \cos v; \quad y = b \sin v,$$

woraus hervorgeht, dafs der Punkt eine Ellipse beschreibt, deren Axen auf den festen Geraden liegen, und deren Halbaxen a und b sind.

Ist P ein mit AB fest verbundener Punkt, welcher auf dem Kreise über AB als Durchmesser liegt, so wird der Winkel AOP konstant. Der Punkt beschreibt also eine durch O gehende Gerade.

Nun sei P ein beliebiger mit AB fest verbundener Punkt, und A_1B_1 sei derjenige Durchmesser des Kreises über AB, welcher durch P geht. A_1B_1 hat dann konstante Länge und gleitet mit seinen Endpunkten auf den festen Geraden OA_1 und OB_1. Der Punkt P beschreibt dann, wie oben gezeigt, eine Ellipse, deren Axen auf OA_1 und OB_1 liegen.

Setzt man an die Stelle von AB eine beliebige Sehne des Kreises über AB und an die Stelle der beiden festen Geraden die beiden Geraden, welche von den Endpunkten der Sehne beschrieben werden, so erhält man dieselbe

Bewegung; das Resultat dieser Untersuchung ist also folgendes:

Wenn eine Strecke AB von konstanter Länge mit ihren Endpunkten auf zwei beliebigen Geraden OA und OB gleitet, so beschreiben alle mit AB fest verbundenen Punkte Ellipsen mit dem Mittelpunkt in O. Ein Punkt, nämlich der Mittelpunkt des Kreises AOB, beschreibt einen Kreis um O, während jeder Punkt der Kreislinie AOB eine Gerade durch O beschreibt. Die Summe der Halbaxen ist für alle Ellipsen die gleiche.

Aus einem kinematischen Satze lassen sich neue Sätze ableiten, indem man die relative Bewegung beibehält, aber andere Punkte als fest betrachtet. Es sei also P einer der oben genannten Punkte, welche eine Gerade durch O beschreiben. Betrachtet man nun A, B und P als fest, so mufs das unveränderliche System OA, OB, OP sich bewegen können. Da zwei von den Linien die Bewegung bestimmen, so sieht man hieraus (was sich auch leicht direkt erkennen läfst), dafs wenn zwei Linien eines beweglichen Systems durch feste Punkte gehen, jede Linie durch ihren Durchschnittspunkt auch durch einen festen Punkt geht. Da nun Linien in konstanter Entfernung von den obengenannten feste Kreise berühren müssen, so hat man folgenden Satz:

Wenn zwei Linien eines in der Ebene beweglichen Systems feste Kreise berühren, so berührt jede Linie des Systems einen festen Kreis. Alle festen Kreise haben ihre Mittelpunkte auf derselben Kreisperipherie.

39. Eine Strecke gleitet mit ihrem einen Endpunkte A mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Geraden, während sie sich gleichzeitig mit konstanter Winkelgeschwindigkeit dreht.

AB und A_1B_1 seien zwei konsekutive Lagen der Strecke. Ist O der augenblickliche Drehpunkt, so sind die Dreiecke OAB und OA_1B_1 kongruent, und Winkel AOA_1 ist der Winkel, um welchen die Strecke sich im Zeitelement gedreht hat. Ist dieser Winkel da, so hat man

$$AA_1 = OAda$$

oder

$$OA = \frac{v}{\omega},$$

wo v die Geschwindigkeit des Punktes A bedeutet, während ω die Winkelgeschwindigkeit der Strecke ist. Die Kurve K ist deshalb eine Gerade, parallel der festen Geraden, während K_1 ein Kreis ist mit dem Mittelpunkt A und dem Radius AO. Die Bewegung ist also dieselbe wie die, welche man erhält, wenn man einen Kreis auf einer Geraden rollen läfst; der Endpunkt der Strecke beschreibt deshalb eine Cykloide.

40. Auf zwei Kreisperipherien von demselben Radius gleitet eine Strecke, deren Länge gleich der Centrale ist.

Die Strecke kann sich parallel der Centrale bewegen und alle ihre Punkte werden dann Kreise beschreiben; sie kann sich indessen auch so bewegen, dafs die an ihre Endpunkte gezogenen Radien nicht parallel sind, und diese Bewegung soll hier namentlich betrachtet werden.

Die Kreismittelpunkte seien O und O_1, während AB die bewegliche Strecke ist. AO und O_1B schnei-

den sich in dem augenblicklichen Drehpunkt M. Da $OM \pm O_1M = OA$, so wird die Kurve K eine Ellipse oder Hyperbel, deren Brennpunkte O und O_1 sind, und deren Brennpunktaxe OA ist. Die Dreiecke OMO_1 und BMA sind kongruent, so dafs K_1 eine andere, der ersten kongruente, Ellipse oder Hyperbel ist mit den Brennpunkten in A und B. Die beiden Kegelschnitte liegen symmetrisch mit Beziehung auf ihre gemeinsame Tangente in M.

Die Bewegung ist also diejenige, welche entsteht, wenn ein Kegelschnitt auf einem anderen, dem ersten kongruenten, Kegelschnitt rollt, so dafs die homologen Punkte nach und nach zusammenfallen.

Im besonderen soll die Bewegung der Mitte von AB betrachtet werden. Dieselbe beschreibt eine Kurve, welche der dem Mittelpunkt des festen Kegelschnitts entsprechenden Fufspunktkurve perspektivisch ähnlich ist; die Polargleichung derselben ist, wenn a und b die Halbaxen bedeuten,

$$p^2 = a^2 \cos^2\theta \pm b^2 \sin^2\theta,$$

woraus hervorgeht, dafs dieselbe die inverse Kurve eines Kegelschnitts ist, dessen Halbaxen a und b umgekehrt proportional sind. Schneiden die beiden Kreise sich rechtwinklig, so werden die Kegelschnitte gleichseitige Hyperbeln und die Kurve eine Lemniskate.

41. Ein rechter Winkel bewegt sich so, dafs seine Schenkel eine feste Ellipse berühren.

Der eine Berührungspunkt sei A; man darf annehmen, dafs die Elementarbewegung dieses Punktes in die Tangente fällt, da die Abweichung unendlich klein

von zweiter Ordnung ist; der augenblickliche Drehpunkt mufs deshalb auf die Normale fallen und ist also der Durchschnittspunkt der Normalen in den Berührungspunkten der beiden Tangenten. Die Linie, welche den Scheitelpunkt des rechten Winkels mit dem Drehpunkt verbindet, halbiert die Sehne zwischen den Berührungspunkten und geht also durch den Mittelpunkt der Ellipse. Die Bewegung des Scheitelpunktes ist folglich beständig senkrecht auf der an den Mittelpunkt der Ellipse gezogenen Linie, was nur der Fall sein kann, wenn der Scheitelpunkt einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt mit dem der Ellipse zusammenfällt. Betrachtet man eine specielle einfache Lage des Winkels, so findet man den Radius des Kreises leicht gleich $\sqrt{a^2+b^2}$.

Dies Resultat läfst sich auch, wenn man den rechten Winkel als fest betrachtet, folgendermafsen ausdrücken:

Wenn eine Ellipse auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleitet, so beschreibt ihr Mittelpunkt einen Kreisbogen, dessen Mittelpunkt im Scheitelpunkt des Winkels liegt.

Die Bestimmung der Kurven K und K_1, welche von sechster Ordnung werden, soll hier übergangen werden.

42. Eine rechtwinklige Ecke bewegt sich so, dafs ihre Seitenflächen Berührungsebenen eines Ellipsoids sind.

Man denke sich das Ellipsoid beweglich, während die Ecke fest ist. Betrachtet man eine kleine, der einen Seitenfläche parallele, Bewegung, und projiciert man das Ellipsoid auf die Seitenfläche, so sieht man hier eine unveränderliche Ellipse, welche auf den Schenkeln eines rechten Winkels gleitet. Der Mittelpunkt derselben beschreibt dann, wie oben gezeigt wurde, einen Kreisbogen,

dessen Mittelpunkt im Scheitelpunkt des rechten Winkels liegt. Die Elementarbewegung des Mittelpunktes des Ellipsoids ist deshalb senkrecht auf der an den Scheitelpunkt der Ecke gezogenen Linie. Da diese Betrachtung für jede der drei Seitenflächen Gültigkeit hat und die dadurch bestimmten Elementarbewegungen des Mittelpunktes in der Berührungsebene der Fläche liegen müssen, welche geometrischer Ort des Mittelpunkts ist, so ist diese Berührungsebene beständig senkrecht auf der an den Scheitelpunkt der Ecke gezogenen Linie. Man sieht also, dafs der Mittelpunkt des Ellipsoids eine Kugelfläche beschreibt, deren Mittelpunkt im Scheitelpunkt der Ecke liegt. Der Radius ergiebt sich leicht als $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, wenn a, b und c die Halbaxen des Ellipsoids sind.

Bildet die Normale die Winkel α, β, γ mit den Axen des Ellipsoids, und ist p der Abstand der Berührungsebene vom Mittelpunkt, so hat man wie bekannt

$$p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma\,;$$

aus dieser Gleichung und den analogen sieht man, dafs für drei auf einander senkrechte Berührungsebenen die Summe der Quadrate der Abstände vom Mittelpunkt konstant ist; sind zwei von den Abständen konstant, so mufs der dritte es deshalb auch sein; man sieht hieraus, dafs es möglich ist, das Ellipsoid derartig zu bewegen, dafs sein Mittelpunkt in Ruhe bleibt. Die Kurve, welche der Berührungspunkt einer der Berührungsebenen auf dem Ellipsoid beschreibt, soll genauer untersucht werden. Poinsot hat dieser den Namen Polodie gegeben und dieselbe bei der Lösung eines wichtigen Problems benutzt, welches in der Dynamik Erledigung finden wird. Doch ist die Bewegung, durch welche die Kurve dort entsteht, verschieden von der hier betrachteten.

Nimmt man die Axen des Ellipsoids zu Koordinatenaxen, und ist p der konstante Abstand der Berührungsebene vom Mittelpunkt, so erhält man, wenn (x, y, z) der Berührungspunkt ist,

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{p^2};$$

dies ist die Gleichung für ein zweites Ellipsoid, welches das gegebene in der gesuchten Kurve schneidet. Ist $a > b > c$, so wird die Kurve auf die xz-Ebene als ein Hyperbelbogen projiciert, während die Projektionen auf die beiden anderen Ebenen beziehungsweise eine ganze Ellipse und einen Ellipsenbogen liefern.

Aus den Gleichungen für die beiden Flächen läfst sich die neue Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{b^2}\right) + \frac{z^2}{c^2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{c^2}\right) = 0,$$

ableiten; dies ist die Gleichung einer Kegelfläche von zweiter Ordnung, welche ihre Spitze im Mittelpunkt des Ellipsoids hat. Für $p = b$ wird die Kegelfläche auf zwei Ebenen reduciert, welche die der Gröfse nach mittlere Axe enthalten. In diesem Falle teilt die Polodie sich in zwei Ellipsen. Für $p = a$ oder $p = c$ wird die Kurve auf die Endpunkte der gröfsten oder kleinsten Axe reduciert.

Da die Berührungsebene konstanten Abstand vom Mittelpunkt hat, so berührt sie eine Kugel; auf dieser bilden die Berührungspunkte eine Kurve, welche sich leicht dadurch bestimmen läfst, dafs die Normalen in den Kurvenpunkten den Normalen in den entsprechenden Berührungspunkten auf dem Ellipsoid parallel sind. Wird die Beziehung zwischen den Richtungscoss. der Normalen ausgedrückt durch

$$(a^2-p^2)\cos^2\alpha+(b^2-p^2)\cos^2\beta+(c^2-p^2)\cos^2\gamma=0,$$

so sieht man, dafs die gesuchte Kurve auf der Kugel die Durchschnittskurve dieser und der Kegelfläche

$$(a^2-p^2)x^2+(b^2-p^2)y^2+(c^2-p^2)z^2=0$$

ist.

43. Eine Gerade bewegt sich mit drei von ihren Punkten in festen Ebenen.

Die drei Ebenen seien die Koordinatenebenen eines schiefwinkligen Systems, so dafs die drei Punkte A, B, C beziehungsweise bestimmt werden durch

$$x_1,\ y_1,\ 0;\quad x_2,\ 0,\ z_2;\quad 0,\ y_3,\ z_3.$$

x, y, z seien die Koordinaten eines vierten Punktes D der Linie; dann hat man

$$x_1-x=\frac{AD}{DC}x;\quad y_1-y=\frac{AD}{DB}y;$$

setzt man dies ein in das Quadrat des konstanten Abstandes AD, so erhält man, wenn α, β, γ die Axenwinkel sind,

$$\frac{x^2}{DC^2}+\frac{y^2}{DB^2}+\frac{z^2}{DA^2}+\frac{2\cos\alpha}{DB\,.\,DA}yz+\frac{2\cos\beta}{DC\,.\,DA}xz+\frac{2\cos\gamma}{DC\,.\,DB}xy=1,$$

woraus hervorgeht, dafs der Punkt D ein Ellipsoid beschreibt, dessen Mittelpunkt der Durchschnittspunkt der gegebenen Ebenen ist. Die Normalen in den Punkten A, B, C und D sind, wie in 25 gezeigt wurde, die Erzeugenden eines Hyperboloids.

Soll der Punkt D zugleich in eine feste Ebene fallen, so mufs derselbe sich in der Durchschnittskurve dieser und des Ellipsoids, also in einer Ellipse bewegen. Ist die Ebene Berührungsebene des Ellipsoids, so kann keine Bewegung stattfinden.

Sind die vier Punkte an feste Flächen gebunden, so kann es auch Lagen geben, in welchen eine Bewegung unmöglich ist. Dafür ist zunächst erforderlich, dafs die vier Normalen Erzeugende derselben Art eines Hyperboloids sind, aber diese Bedingung ist nicht immer ausreichend. (A), (B), (C), (D) seien die vier Flächen, und (D_1) sei die Fläche, welche geometrischer Ort für D ist, wenn A, B und C an (A), (B) und (C) gebunden sind. Ist die erwähnte Bedingung erfüllt, so müssen (D) und (D_1) sich in D berühren. Ist nun D ein imaginärer Doppelpunkt der Durchschnittskurve der beiden Flächen, so wird eine Bewegung unmöglich, während dies nicht der Fall ist, wenn D ein reeller Doppelpunkt ist, da es in solchem Falle zwei Richtungen giebt, in welchen die Bewegung von D erfolgen kann.

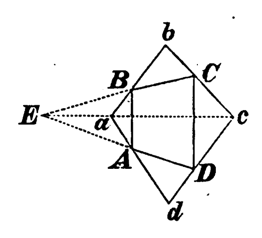
SIEBENTES KAPITEL.

Gegliederte Systeme.

44. Ein gegliedertes System ist ein System von Stäben (geraden Linien), welche da, wo sie zusammenstofsen, so mit einander verbunden sind, dafs die Winkel, welche sie mit einander bilden, veränderlich sind. Ist die Verbindung derartig, dafs die Bewegung eines Punktes die Bewegung der übrigen Punkte bestimmt, so nennt man die Verbindung vollkommen oder man sagt, das System habe einen Grad von Freiheit. Die einzelnen Systempunkte beschreiben dann Kurven, während doch einige von ihnen fest sind. Im Folgenden sollen namentlich derartige Verbindungen betrachtet werden. In der Praxis

werden dieselben zur Übertragung (Umsetzung) von Bewegungen benutzt, d. h. zum Hervorbringen solcher Bewegungen, welche man gebrauchen will, mit Hülfe anderer Bewegungen, welche man leicht hervorrufen kann.

45. Das gegliederte Viereck. $ABCD$ sei ein gegliedertes Viereck, welches sich auf irgendwelche Weise in einer Ebene bewegen kann. Für eine beliebige Elementarbewegung seien die augenblicklichen Drehpunkte für AB, BC, CD und DA beziehungsweise a, b, c, d, während die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2, ω_3 und ω_4 sind. Die Punkte a, B, b müssen auf einer Geraden liegen, da die Geschwindigkeit des Punktes B sowohl auf bB als auf aB senkrecht ist. Da die Gröfse dieser Geschwindigkeit sich ausdrücken läfst durch $\omega_1 . aB$ und $\omega_2 . bB$, so hat man



$$\frac{aB}{bB} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

und auf ähnliche Weise

$$\frac{bC}{cC} = \frac{\omega_3}{\omega_2}.$$

Ist E der Durchschnittspunkt von BC und ac, so erhält man nun durch den bekannten Satz über eine Transversale im Dreieck (Satz des Menelaos)

$$\frac{Ea}{Ec} = \frac{\omega_3}{\omega_1}.$$

Dieselbe Bestimmung erhält man für den Durchschnittspunkt von ac und AD, so dafs die beiden Durchschnittspunkte zusammenfallen. Das Resultat dieser Untersuchung ist also folgendes:

Bei einer beliebigen Elementarbewegung eines gegliederten ebenen Vierecks in dessen Ebene ist dasselbe demjenigen Viereck einbeschrieben, dessen Eckpunkte die vier augenblicklichen Drehpunkte sind; zwei gegenüberliegende Seiten und die Linie, welche die Drehpunkte der beiden anderen verbindet, schneiden sich in demselben Punkt.

46. Die Dreistabskurve. Das gegliederte Viereck spielt eine grofse Rolle bei Maschinenkonstruktionen zur Übertragung von Bewegungen. Am häufigsten wird dasselbe so angewendet, dafs eine Seite fest ist und nur drei bewegliche Stäbe vorhanden sind.

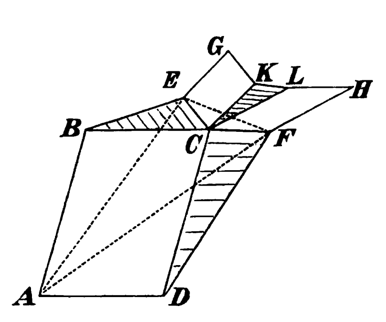
A und D seien die festen Punkte; B und C beschreiben dann Kreise um die festen Punkte als Mittelpunkte. Ein beliebiger Punkt von BC oder ein aufserhalb BC liegender, aber fest damit verbundener Punkt beschreibt eine Kurve, welche Dreistabskurve heifsen möge. Dieselbe wurde oben (40) in einem speciellen Falle untersucht, wo sie sich in einen Kreis und eine Kurve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in den unendlich fernen Kreispunkten teilte. Es soll hier keine Zeit auf das Aufsuchen der sehr zusammengesetzten Gleichung der Dreistabskurve verwendet werden, sondern es mag genügen einige von den Resultaten anzuführen, die sich bei einer genaueren Untersuchung ergeben. Die Kurve ist von sechster Ordnung und geht dreimal durch jeden der unendlich fernen Kreispunkte. Die Tangenten in diesen sind paarweise konjugiert, und jedes Paar bestimmt durch seinen reellen Durchschnittspunkt einen von den drei Brennpunkten der Kurve, von denen zwei auf A und D fallen.

Es soll untersucht werden, ab die Kurve Doppelpunkte habe. Der Eckpunkt O des unveränderlichen Dreiecks BOC sei der beschreibende Punkt. Damit ein Punkt Doppelpunkt sein kann, mufs O zweimal durch denselben hindurchgehen, das heifst, es müssen sich zwei kongruente Dreiecke BOC und $B_1 OC_1$ hinlegen lassen, so dafs B und B_1 auf dem Kreise um A, C und C_1 auf dem Kreise um D liegen. Der Winkel BOB_1 mufs von AO, der Winkel COC_1 von DO halbiert werden, so dafs Winkel AOD gleich dem Winkel BOC sein mufs. O mufs deshalb auf der durch A und D gehenden Kreisperipherie liegen, welche den Winkel BOC fafst. Umgekehrt sieht man leicht, dafs jeder Durchschnittspunkt dieses Kreises und der von O beschriebenen Dreistabskurve ein Doppelpunkt ist. Die Kurve hat deshalb drei Doppelpunkte aufser den in den Kreispunkten zusammenfallenden 6 Doppelpunkten.

Wie später gezeigt werden wird, kann die von O beschriebene Kurve auf drei verschiedene Arten als Dreistabskurve hervorgebracht werden, indem man zwei beliebige von den Brennpunkten als feste Punkte für ein gegliedertes Viereck benutzt, welches die Bewegung von O regelt. Die drei Brennpunkte und die drei Doppelpunkte fallen deshalb auf dieselbe Kreisperipherie.

47. Der Pantograph ist ein gegliedertes Parallelogramm, welches benutzt werden kann um eine Kurve zu zeichnen, welche einer gegebenen Kurve perspektivisch ähnlich ist. $ABCD$ sei das Parallelogramm und E und F seien zwei Punkte beziehungsweise auf BC und CD so gelegen, dafs A, E und F auf einer Geraden liegen; man sieht leicht, dafs die Punkte diese Eigenschaft bei

irgendwelcher Bewegung des Parallelogramms behalten, und ebenso, dafs das Verhältnis $AE:AF$ konstant ist. Hält man nun A fest, während man E eine beliebige Kurve durchlaufen läfst, so wird F eine derselben perspektivisch ähnliche Kurve durchlaufen. Sylvester hat diesen Apparat so verändert, dafs man damit eine Kurve zeichnen kann, welche der gegebenen ähnlich und um einen beliebigen Winkel um A gedreht ist. Um das zu erreichen, legt er die Punkte E und F aufserhalb der Seiten des Parallelogramms, so dafs die unveränderlichen Dreiecke BEC und DCF ähnlich sind mit derselben Umlaufsrichtung.



(Die Buchstaben geben durch ihre Reihenfolge die homologen Stücke an). Man findet dann leicht

$$\triangle ABE \sim \triangle FCE \sim \triangle FDA$$

und dadurch

$$\triangle AEF \sim \triangle BEC,$$

so dafs E und F ähnliche Figuren beschreiben.

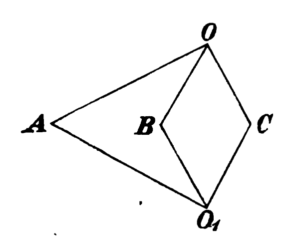
Man erhält dadurch einen eleganten Beweis für den oben erwähnten Satz über die dreifache Erzeugung der Dreistabskurve. E möge einen Kreis mit dem Mittelpunkte G beschreiben; F beschreibt dann einen Kreis mit dem Mittelpunkte H, so dafs $AEG \sim AFH$. Nun kann man, ohne die Bewegung zu hindern, durch hinzugefügte Stäbe die gegliederten Parallelogramme EK und FL bilden. Das Dreieck KCL mufs dann während der Bewegung unveränderlich sein, da $\angle KCL = \angle EAF$.

Die Bewegung kann deshalb keine Hinderung erleiden, wenn man GK und LH durch einen hinzugefügten Stab KL in gegliederte Verbindung bringt. Man ersieht daraus, dafs man den Punkt C zum Beschreiben seiner Bahn dadurch bringen kann, dafs man ihn in feste Verbindung bringt mit dem mittelsten Stabe in irgendeinem von den drei Systemen $ABEG$, $ADFH$, $GKLH$, wo die Punkte A, G und H fest sind. Diese Punkte sind die drei Brennpunkte der von C beschriebenen Dreistabskurve.

48. Inversoren sind Apparate, durch welche eine solche Verbindung zwischen den Bewegungen zweier Punkte hervorgebracht wird, dafs, wenn man den einen eine beliebige Kurve beschreiben läfst, der andere die inverse Kurve beschreibt. Ein solcher Apparat ist zuerst von Peaucellier konstruiert; später hat Hart einen anderen Apparat konstruiert, durch welchen dasselbe mittels weniger Stäbe erreicht wird. Beiden Konstruktionen liegt der Satz von der Potenz eines Punktes mit Beziehung auf einen Kreis zu Grunde, oder wie es hier ausgedrückt werden soll:

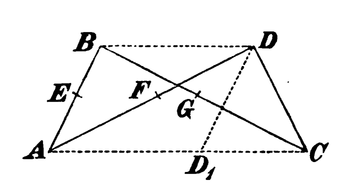
Wenn drei Linien OA, OB und OC, wo $OB = OC$, sich so um O drehen, dafs A, B und C auf einer Geraden liegen, so ist $AB \, . \, AC$ konstant, nämlich gleich dem Unterschiede der Quadrate von OA und OB. Hält man A fest und bringt eine solche Verbindung hervor, dafs A, B und C beständig auf einer Geraden liegen, so müssen also B und C inverse Kurven beschreiben.

Peaucellier bringt die Verbindung hervor, indem er zu dem System ein kongruentes System O_1A, O_1B,



$O_1 C$ so hinzufügt, dafs alle Verbindungen gegliedert sind. A, B und C liegen dann immer auf der Mittelsenkrechten von $O O_1$.

Hart benutzt vier Stäbe, welche ein uneigentliches Viereck $ABCD$ bilden, und wo $AB = CD$, $AD = BC$. BD mufs dann der AC parallel sein. Zieht man $DD_1 \mathrel{\rlap{\,/}{=}} BA$, so zeigt der oben erwähnte Satz, dafs $BD \, . \, AC$ konstant ist. Dasselbe ist dann der Fall mit $EF \, . \, EG$, wenn E, F und G die AB, AD und CB in proportionale Teile teilen. Da diese drei Punkte beständig auf derselben Geraden liegen müssen, so beschreiben F und G inverse Kurven, wenn E festgehalten wird.



Mittels eines Inversors kann man eine gerade Linie beschreiben, indem man durch einen hinzugefügten Stab mit einem festen Endpunkt den einen der beschreibenden Punkte zwingt, einen Kreis durch das Inversionscentrum zu beschreiben. Man kann auch eine Ellipse beschreiben, indem man den Inversor mit einem Apparat in Verbindung bringt, mit dem man die inverse Kurve der Ellipse beschreiben kann (40).

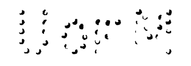
49. Das Planimeter wird benutzt um den Flächeninhalt einer auf das Papier aufgetragenen geschlossenen Kurve zu bestimmen. Bevor die Beschreibung eines solchen Apparates unternommen wird, sollen die Flächenräume betrachtet werden, welche eine unveränderliche

Strecke beschreibt, die nach einer Bewegung in der Ebene wieder in ihre Anfangslage zurückkehrt. Der Einfachheit wegen möge angenommen werden, dafs die Strecke keine ganze Umdrehung gemacht hat, so dafs die Summe der Winkelelemente, um welche sie sich gedreht hat, Null wird. Die einzelnen Punkte der Strecke beschreiben geschlossene Kurven; der Flächeninhalt einer solchen wird positiv oder negativ gerechnet, je nachdem man beim Verfolgen des beschreibenden Punktes das Fläckenstück auf der einen oder der anderen Seite hat.

Wenn eine Strecke in eine konsekutive Lage übergeht, so kann man sich vorstellen, dafs dies durch eine Drehung geschieht, der eine Parallelverschiebung folgt, so dafs das Flächenelement aus einem Sektor und einem Parallelogramm zusammengesetzt ist; das Vorzeichen des ersteren wird nach der Umlaufsrichtung bestimmt, das des letzteren nach der Seite der Strecke, nach welcher die Verschiebung vor sich geht. Wenn eine Strecke auf die oben angegebene Weise in ihre Anfangslage zurückkehrt, so ist die Summe der elementaren Sektoren immer gleich Null.

Ein Element der Strecke beschreibt eine Fläche, welche, wie leicht ersichtlich, gleich der Differenz zwischen den Flächeninhalten der von den Endpunkten des Elements beschriebenen geschlossenen Kurven ist. Durch Summation aller von den Streckenelementen beschriebenen Flächen ergiebt sich dann:

Eine Strecke, welche sich in einer Ebene bewegt und in ihre Anfangslage zurückkehrt ohne eine ganze Umdrehung gemacht zu haben, hat ein Flächenstück beschrieben, welches gleich der Differenz der Flächeninhalte der



von den Endpunkten beschriebenen geschlossenen Kurven ist.

Auf dieser Grundlage läſst sich leicht ein Planimeter konstruieren; man benutzt dazu eine Verbindung von zwei Stäben, ABC, wo A festgehalten wird, während man mit C die Kontur der Fläche durchläuft, welche gemessen werden soll. Der Punkt A wird so gewählt, daſs B keinen Kreis beschreibt, sondern nur einen Bogen vorwärts und rückwärts; die gesuchte Fläche ist dann gleich der vom Stabe BC beschriebenen. Auf diesem als Axe ist eine kleine Scheibe angebracht, welche auf dem Papier rollt. Wenn BC sich um einen gewissen Winkel um B dreht, so dreht die Scheibe sich um einen diesem proportionalen Winkel, aber auf diese Drehungen braucht man keine Rücksicht zu nehmen, da dieselben sich beim Schlusse der Bewegung gegenseitig aufgehoben haben. Die Drehung der Scheibe, auf ihrer Peripherie gemessen, wird deshalb am Schlusse der Bewegung die algebraische Summe der Höhen in den von BC beschriebenen elementaren Parallelogrammen angeben, so daſs man nur nötig hat mit der Länge von BC zu multiplicieren um den gesuchten Flächeninhalt zu erhalten.

Läſst die Scheibe sich ohne Reibung auf dem Stabe verschieben, während sie auf dem Papier nicht gleiten kann, so wird das Stück, um welches sie verschoben ist, wenn der Stab in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, die Länge (mit Vorzeichen gerechnet) der Enveloppe des Stabes sein. Das ergiebt sich leicht auf folgende Weise: Wenn der Stab auf seiner Enveloppe rollte ohne zu gleiten, so würde derselbe, wenn er zurückkehrte, längs sich selbst um ein Stück verschoben sein, welches eben die Länge der Enveloppe darstellte; diese Verschiebung wird indessen

aufgehoben durch die successiven Verschiebungen, welche der Stab in seiner eigenen Richtung erfährt, und diese werden eben durch die Verschiebung der Scheibe auf dem Stabe gemessen.

Nun sei DE ein mit BC fest verbundener Stab, während O ein gleichfalls mit BC fest verbundener Punkt ist; eine Elementarbewegung des Systems läfst sich dann in eine Drehung um O und eine Verschiebung OO_1 zerlegen; kehrt der Stab in seine Anfangslage zurück, so haben alle Drehungen sich gegenseitig aufgehoben, so dafs man nur nötig hat die Verschiebungen zu betrachten; sind die Komponenten von OO_1 nach BC und senkrecht darauf dx und dy, nach DE und senkrecht darauf dx_1 und dy_1, und bedeutet v den Winkel zwischen BC und DE, so hat man

$$dx_1 = dx \cos v - dy \sin v; \quad dy_1 = dx \sin v + dy \cos v,$$

woraus durch Integration längs des ganzen Weges:

$$x_1 = x \cos v - y \sin v; \quad y_1 = x \sin v + y \cos v;$$

hierin bedeuten x und x_1 die Linien, welche, mit der Länge der Stäbe multipliciert, die von diesen beschriebenen Flächenräume angeben, während y und y_1 die Längen ihrer Enveloppen sind. Man sieht hieraus, dafs man nur die Resultante von x und y für eine Linie des Systems zu kennen braucht, um durch Projektion derselben auf eine beliebige Linie und deren Normale die dieser Linie entsprechenden x und y zu finden. Hierauf lassen sich viele hübsche Anwendungen gründen, deren Verfolgung an dieser Stelle indessen zu weit führen würde.*)

---

*) Diese elegante Konstruktion, mittels welcher die ganze Bewegung durch eine Linie bestimmt wird, verdanke ich Herrn Direktor F. Bing in Kopenhagen.

ACHTES KAPITEL.

Anwendungen, welche der Praxis entnommen sind.

---

50. Watts Parallelogramm. Da bei einer Dampfmaschine die Punkte des Balanciers Kreisbogen beschreiben, während ein Punkt der Kolbenstange eine gerade Linie beschreiben soll, so mufs man eine solche Verbindung hervorbringen, dafs dadurch die eine von diesen Bewegungen in die andere umgesetzt wird. Watt löste diese Aufgabe mit einer für die Praxis ausreichenden Annäherung mittels einer gegliederten Verbindung, die unter dem Namen des Wattschen Parallelogramms bekannt ist.

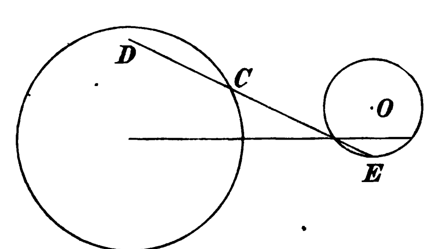
OA sei der halbe Balancier, welcher sich um O dreht. $ABCD$ sei ein gegliedertes Parallelogramm, dessen eine Seite AB ein Teil des Balanciers ist. D ist in die Kolbenstange eingelenkt, während C durch eine Gelenkstange, den Gegenlenker, mit einem festen Punkt verbunden ist. C und A beschreiben dann Kreisbogen, während D, wenn die Gröfse der Stücke zweckmäfsig abgepafst ist, mit grofser Annäherung eine Gerade beschreibt.

Denkt man sich das Parallelogramm $OBCE$, so wird DE gleich AO, so dafs E einen Kreisbogen beschreibt um O als Mittelpunkt und mit einem Radius gleich AD. Dadurch wird die Aufgabe auf folgende reduciert:

Eine Strecke CE von unveränderlicher Länge gleitet mit ihren Endpunkten auf zwei Kreisperipherien. Die Stücke sollen so bestimmt

werden, dafs ein Punkt von CE möglichst nahe eine gerade Linie beschreibt.

Es ist indessen vorzuziehen, die Aufgabe etwas anders zu stellen, indem man die Länge von CE als veränderlich betrachtet und die Forderung stellt, dafs ein Punkt, der CE nach einem konstanten Verhältnis teilt, eine wirkliche Gerade beschreiben soll, und dann die Bedingung dafür aufsucht, dafs die Länge der Strecke möglichst nahe konstant bleibt. Man nehme ein rechtwinkliges Koordinatensystem und lege die Abscissenaxe durch den Mittelpunkt des einen Kreises und senkrecht auf der geraden Linie, welche beschrieben werden soll; die Bedingung ist dann, dafs eine lineare Verbindung zwischen den Abscissen von C und E existiert, denn in solchem Falle wird ein Punkt, welcher CE nach einem passenden Verhältnis teilt, eine konstante Abscisse erhalten.



Die Gleichungen der Kreise seien

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2 \quad \text{und} \quad y^2 + (x-a)(x-a_1) = 2by,$$

indem der zweite Kreis, welcher der geometrische Ort für E ist, die Stücke a und a_1 ($a_1 > a$) von der Abscissenaxe abschneidet. Wenn E die Abscisse a_1 hat, so befindet die CE sich in ihrer mittleren Lage und ihre Länge ist $a_1 - r$; wenn E die Abscisse a hat, so befindet CE sich in einer ihrer äufsersten Lagen, bei der auch gefordert wird, dafs die Länge $a_1 - r$ sein soll; dadurch

findet man, dafs den Abscissen a_1 und a für E beziehungsweise die Abscissen

$$r \text{ und } \frac{2a_1 r + a^2 - a_1^2}{2a}$$

für C entsprechen; dadurch läfst sich die lineare Verbindung bestimmen, welche

$$x_1 = \alpha x + \beta$$

wird, worin

$$\alpha = \frac{a + a_1 - 2r}{2a}, \quad \beta = \frac{(a + a_1)(2r - a_1)}{2a}.$$

Für den Abstand l zwischen zwei zusammengehörigen Punkten findet man nun

$$l^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

$$= r^2 + (a + a_1)x - aa_1 - 2\alpha x^2 - \beta x + 2y(b - y_1),$$

woraus

$$l^2 - (a_1 - r)^2$$

$$= -2\alpha(r^2 - (a + a_1)x) - a_1(a_1 + a - 2r) + 2y(b - y_1)$$

$$= -2\alpha(x^2 - (a + a_1)x + aa_1) - 2yy_1$$

$$= 2y(-y_1 + \alpha y + b(1 - 2\alpha)).$$

Man sieht hieraus, dafs man am besten thut b (die Ordinate des Mittelpunkts) so grofs zu wählen, wie die Verhältnisse zulassen, da y dadurch klein wird, und dafs man $\alpha = \frac{1}{2}$ nehmen mufs; dann erhält man

$$l^2 - (a_1 - r)^2 = y^2 - 2yy_1,$$

nebst $a_1 = 2r$, $x = 2x_1$, woraus hervorgeht, dafs die gerade Linie, welche beschrieben wird, die Ordinatenaxe ist und dafs der beschreibende Punkt derjenige ist, welcher die Strecke CE aufsen nach dem Verhältnis $1:2$ teilt. Im Parallelogramm mufs man deshalb $AB = \frac{1}{2} AO$ und die andere Seite so grofs wie möglich machen. Zu demselben Resultate gelangte Watt durch eine grofse Menge

von Versuchen. Betrachtet man den kleinen von E beschriebenen Kreisbogen als eine gerade Linie, so hat man die oben besprochene Bewegung (38).

51. Stephensons Coulissensteuerung wird zur Steuerung des Schiebers in einer Dampfmaschine angewandt, namentlich in solchen Fällen, wo man der Bewegung plötzlich die entgegengesetzte Richtung soll geben können. Bevor diese Steuerung untersucht wird, soll indessen die einfache Schiebersteuerung mittels einer Excenterstange betrachtet werden.

Auf der Axe des Krummzapfens ist eine excentrische Scheibe befestigt, welche von einem Ringe umschlossen wird, in dem sie gleiten kann; an dem Ringe ist eine Stange befestigt, deren anderes Ende den Schieber steuert, der nur eine hin- oder hergehende Bewegung erhalten kann; man kann die Stange als vom Mittelpunkte der excentrischen Scheibe, welcher eine Kreisperipherie beschreibt, ausgehend betrachten; die Bewegung ist deshalb eine solche, welche man erhält, wenn man eine Strecke von konstanter Länge mit dem einen Endpunkt A auf einer Kreisperipherie gleiten läſst, während der andere Endpunkt B auf einer Geraden gleitet, von der man annehmen kann, daſs sie durch den Mittelpunkt O des Kreises geht.

Ist r der Radius des Kreises, l die Länge der Stange, v der Winkel AOB und setzt man $OB = x$, so hat man

$$x = r \cos v + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 v},$$

woraus man durch Differentiation leicht das Verhältnis zwischen der Geschwindigkeit des Schiebers $\frac{dx}{dt}$ und der Winkelgeschwindigkeit des Krummzapfens $\frac{dv}{dt}$ bestimmt.

In der Praxis ist indessen in der Regel die Stange so lang in Verhältnis zum Radius des Kreises, dafs man die Projektion der Stange auf OB als konstant und gleich l betrachten kann. Die Geschwindigkeit des Schiebers ist dann die Projektion der Geschwindigkeit von A, oder

$$\frac{dx}{dt} = -r \sin v \frac{dv}{dt} = -y \frac{dv}{dt},$$

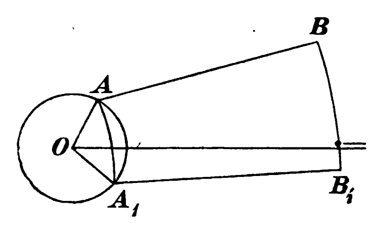
wo y die Höhe des Punktes A über OB ist. Trägt man die Geschwindigkeit längs OA ab, so erhält man einen Punkt, dessen geometrischer Ort aus zwei Kreisen besteht, die sich in O berühren, und deren Radien beide gleich $\frac{1}{2}r$ sind.

OA fällt nicht mit dem Krummzapfen zusammen, sondern bildet mit demselben einen konstanten Winkel; die Folge hiervon ist, dafs der Schieber die Dampfzuströmung abschliefst, bevor der Kolben seinen Weg vollendet hat, so dafs der Druck auf den Kolben während des übrigen Teils des Weges beständig verringert wird auf Grund der Expansion des abgesperrten Dampfs.

Stephensons Apparat besteht aus zwei Systemen OAB und OA_1B_1, wie das oben beschriebene, wo OA und OA_1 gleich grofs sind und einen konstanten Winkel bilden, und wo $AB = A_1B_1 = l$. B und B_1 sind durch Gelenke mit der Coulisse verbunden, welche die Form eines Bogens mit dem Radius l hat, und sich durch einen Hebel heben und senken läfst. Die Coulisse hat einen Längsschlitz, womit sie den Kopf einer Stange umfafst, welche am Schieber befestigt ist, und folgt diesem in seiner Hin- und Herbewegung.

Wird nun die Coulisse gehoben, so dafs ihr unterster Punkt B_1 den Kopf der Stange ergreift, so wirkt das System wie die einfache Steuerung OA_1B_1; wird die

Coulisse dagegen gesenkt, so dafs B den Kopf ergreift, so wirkt sie wie die einfache Steuerung OAB. Hat nun der Winkel AOA_1 eine passende Grösse, so werden bei den beiden Stellungen der Coulisse entgegengesetzte Bewegungen hervorgerufen werden. Es soll nunmehr untersucht werden, welche Bewegung hervorgerufen wird, wenn die Coulisse eine Stellung erhält, welche zwischen den beiden erwähnten liegt; dabei wird sich ergeben, dafs die Bewegung in allen Fällen mit grofser Annäherung dieselbe ist wie die, welche durch eine gewisse einfache Steuerung hervorgerufen wird.



Um die gegenseitige Lage der Stücke des Systems zu untersuchen, denke man sich AOA_1 fest, während die Coulisse bewegt wird. B und B_1 beschreiben dann Kreise, welche, da ihr Radius l grofs ist im Verhältnis zur Centrale AA_1, sehr wenig von einander abweichen. Die Dreistabskurve, welche von einem beliebigen Punkte P der Coulisse beschrieben wird, kann deshalb nur wenig von der Kreisform abweichen; betrachtet man dieselbe als einen Kreis mit dem Mittelpunkt A_2, so wird A_2P konstant, und das System wirkt wie die einfache Steuerung OA_2P. Es kommt deshalb darauf an, die Lage des Punktes A_2 zu bestimmen.

Man betrachte die Coulisse in den beiden Stellungen, in denen die Sehne BB_1 der AA_1 parallel ist; in der einen von diesen Stellungen liegen die Stangen l wie in der Figur, in der anderen kreuzen dieselben sich. Ist c

die halbe Sehne der Coulisse und $2k = AA_1$, so wird der Abstand der Sehnen in den beiden Stellungen

$$\sqrt{l^2 - (c-k)^2} + \sqrt{l^2 - (c+k)^2};$$

da $c \pm k$ klein ist im Verhältnis zu l, so kann man statt dieses Ausdrucks setzen

$$l - \frac{(c-k)^2}{2l} + l - \frac{(c+k)^2}{2l} = 2l - \frac{c^2 + k^2}{l};$$

legt man hierzu das doppelte des Pfeils, so erhält man für den Abstand der beiden Bogenmitten mit genügender Annäherung

$$2l - \frac{k^2}{l},$$

ein Ausdruck, der, wenn $\frac{k}{l}$ klein ist, durch $2l$ ersetzt werden kann.

Die Mitte der Verbindungslinie der beiden Bogenmitten hat einen Abstand von AA_1 gleich

$$\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{l^2 - (c-k)^2} - \sqrt{l^2 - (c+k)^2}\right) = \frac{ck}{l};$$

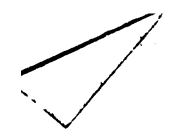
dieser Punkt fällt zusammen mit der Mitte eines Bogens über AA_1 mit dem Radius $\frac{kl}{2c}$ oder, was hier im wesentlichen dasselbe bleibt, eines Bogens, der doppelt so viele Grade hat wie die Coulisse. Ein Kreis um diesen Punkt als Mittelpunkt mit dem Radius l wird deshalb in einer sehr kleinen Entfernung an der Mitte der Coulisse in den beiden Stellungen vorbeigehen. Da eine Untersuchung der Abweichung für andere Stellungen der Coulisse, bei denen hier nicht verweilt werden soll, zeigt, daſs diese beständig sehr klein ist, so kann man diesen Kreis als mit der Dreistabskurve zusammenfallend betrachten, welche von der Mitte der Coulisse beschrieben wird.

Betrachtet man nun die Mitte der halben Coulisse, so sieht man auf dieselbe Weise, dafs man ihre Bahn als mit einem Kreise zusammenfallend betrachten kann, der den Radius l hat, und dessen Mittelpunkt auf der Mitte des halben Bogens über AA_1 liegt. Fährt man in dieser Weise unausgesetzt mit dem Halbieren fort, so erhält man folgendes Resultat:

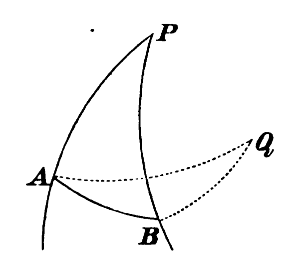
Wenn $k^2:l$ als verschwindend betrachtet werden kann, so wird Stephensons Coulisse wirken wie eine einfache Steuerung mit einer Excenterstange von der Länge l, und mit einem A entsprechenden Punkte A_2, der auf einem Bogen AA_2A_1 liegt, welcher doppelt so viele Grade enthält wie die Coulisse, und diesen Bogen nach demselben Verhältnis teilt, nach welchem die Coulisse von dem steuernden Punkte geteilt wird.

52. Cardanos Universalgelenk dient zur Umsetzung einer Axendrehung in eine andere Axendrehung. Jede der Axen endet in eine Gabel, deren Endpunkte sich in gegliederter Verbindung mit den diametral entgegengesetzten Punkten eines Ringes befinden, so dafs die beiden Durchmesser senkrecht auf einander stehen. Eine Drehung der einen Axe um sich selbst wird dann eine Bewegung des Ringes veranlassen und dadurch eine Drehung der anderen Axe. Es soll das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Rotationen bestimmt werden.

Der Mittelpunkt des Ringes, welcher nicht bewegt wird, sei O, während A ein Endpunkt der einen, und B ein Endpunkt der anderen Gabel ist. Legt man eine



Kugel um O mit dem Radius des Ringes, so müssen A und B sich in festen gröfsten Kreisen auf dieser bewegen. Die Ebenen dieser gröfsten Kreise stehen senkrecht auf den entsprechenden Axen, so dafs sie denselben Winkel wie diese mit einander bilden; da $AB = 90°$, so ist die Bewegung eine solche, welche entsteht, wenn ein Bogen eines gröfsten Kreises von 90° mit seinen Endpunkten auf zwei festen gröfsten Kreisen gleitet.



Die festen gröfsten Kreise mögen sich in P schneiden, während ihre sphärischen Perpendikel in A und B sich in Q schneiden. OQ ist dann die augenblickliche Drehaxe, und man hat für die Winkelgeschwindigkeiten ω und ω_1

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\sin AQ}{\sin BQ} = \frac{\sin ABQ}{\sin BAQ} = -\frac{\cos ABP}{\cos BAP},$$

aber
$$\cos ABP . \cos BAP = -\cos P,$$

mithin
$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\cos^2 ABP}{\cos P}.$$

Der Ausdruck zeigt, dafs es unmöglich ist die Bewegung zu übertragen, wenn die Axen senkrecht auf einander stehen.

53. Zahnräder werden benutzt um eine Axendrehung in eine andere Axendrehung umzusetzen, so dafs das Verhältnis zwischen den Winkelgeschwindigkeiten konstant wird. Hier soll nur der Fall betrachtet werden, wo die Axen parallel sind.

Die Projektionen der Axen auf eine senkrecht auf denselben stehende Ebene seien O und O_1. Um diese

Punkte als Mittelpunkte konstruiere man zwei Kreise, welche sich von aufsen berühren, und bei denen das Verhältnis der Radien gleich dem verlangten Verhältnis zwischen den Winkelgeschwindigkeiten ist. Es kommt dann darauf an eine solche Bewegung hervorzurufen, dafs diese beiden Kreise auf einander rollen ohne zu gleiten. Das geschieht, indem man statt der Kreise zwei Räder setzt, die mit in einander greifenden Zähnen versehen sind. Diese Zähne müssen so konstruiert sein, dafs zwei derselben während der Bewegung einander beständig berühren. Man braucht nur das Profil der Zähne zu betrachten, wie es beim Durchschnitt mit der Ebene der beiden Kreise entsteht.

Die Aufgabe ist unbestimmt, da das Profil der Zähne des einen Rades willkürlich gewählt werden kann. Ein solches Profil sei bestimmt durch eine Kurve A, welche mit dem Kreise O verbunden ist. Die relative Lage wird dadurch nicht verändert, dafs man sich den Kreis O_1 fest denkt, während der Kreis O mit der Kurve A auf demselben rollt ohne zu gleiten. Das Profil des zu O_1 gehörigen Zahnes mufs dann die Enveloppe der beweglichen Kurve A sein.

Der augenblickliche Drehpunkt des rollenden Kreises ist der Berührungspunkt desselben mit dem festen Kreise. Eine Normale von diesem Punkte an die Kurve A trifft den Punkt, wo diese ihre Enveloppe berührt, also den Berührungspunkt der beiden Zahnprofile. Da dieser Punkt nicht der Drehpunkt ist, so müssen die Zähne, welche auf einander rollen, zugleich gleiten. Sind die wirklichen Winkelgeschwindigkeiten ω und ω_1, so wird die Winkelgeschwindigkeit für A in der relativen Bewegung

$$\omega + \omega_1,$$